NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes de géométrie déduits du calcul des symboles (voir Bulletin, t. Ier, p. 83)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 221-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__221_1>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DÉDUITS DU CALCUL DES SYMBOLES.

(voir BULLETIN, t. Ier, p. 83)

1. Les deux courbes données par les équations

$$F(x, y) = 0, \quad F(x + a, y + b) = 0$$

se coupent en des points qui sont sur une troisième courbe donnée par l'équation symbolique

$$e^{a D_x + b D_y} F(x, y) = 0.$$

Lorsque $F(x, y)$ est algébrique et de degré n, la troisième courbe est de degré $n - 1$.

2. Les deux surfaces données par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x + a, y + b, z + c) = 0$$

se coupent en une ligne qui est sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$e^{a D_x + b D_y + c D_z} F(x, y, z) = 0,$$

et cette surface est de degré inférieur d'une unité au degré des surfaces données.

3. $$F(x, y) = 0$$

étant l'équation d'une courbe plane, si elle tourne d'une quantité infiniment petite autour d'un axe passant par l'origine perpendiculairement à son plan, les points d'intersection des deux courbes sont sur la courbe donnée par l'équation symbolique

$$(x D_y - y) D_x . F(x, y) = 0$$

de même degré que les courbes données et passant par l'origine. Pour les coniques, c'est une hyperbole équilatère.

4. $$F(x, y, z) = 0,$$

étant l'équation d'une surface, si elle tourne infiniment peu autour d'un axe passant par l'origine et faisant avec les axes x, y, z supposés rectangulaires les angles l, m, n, les points d'intersection sont sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$\left[\begin{array}{r}\cos l\,(z D_y - y D_z) + \cos m\,(x D_z - z D_x) \\ + \cos n\,(y D_x - x D_z)\end{array}\right] . F(x, y, z) = 0.$$

5. $$\left[\begin{array}{r}(y \cos n - z \cos m) D_x + (z \cos l - x \cos m) D_y \\ + (x \cos m - y \cos l) D_z\end{array}\right] . u = 0,$$

où u est une fonction de x, y, z. Telle est l'équation différentielle d'une surface de révolution; cette équation exprime que la perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation et un rayon vecteur, fait un angle droit avec la normale à la surface.

6. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une courbe plane; u_p est une fonction homogène en x, y et de degré p. Les tangentes distantes de l'origine d'une quantité constante k, ont leurs points de contact sur une courbe de degré $2(n-1)$ et donnée par l'équation

$$k^2 [(D_x U)^2 + (D_y U)^2] \\ = (u_{n-1} + 2 u_{n-2} + 3 u_{n-3} + \ldots + n u_0)^2.$$

7. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une surface de degré n. Les plans tangents, distants de l'origine d'une quantité constante k, ont leurs points de contact sur une surface de degré $2(n-1)$, donnée par l'équation

$$\begin{aligned} &k^2[(D_x U)^2 + (D_y U)^2 + (D_z U)^2] \\ &= (u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0)^2. \end{aligned}$$

8. α, β, γ étant les coordonnées d'un point, l'équation de la surface polaire relative à ce point est

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U + (U) = 0,$$

où

$$(U) = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0.$$

Si le point (α, β, γ) est une surface de degré m donnée par l'équation

$$V = v_m + v_{m-1} + \ldots + v_0 = 0,$$

la surface enveloppe des surfaces polaires comporte les équations

$$\begin{aligned} D_x U . d\alpha + D_y U . d\beta + D_z U . d\gamma &= 0, \\ D_\alpha V . d\alpha + D_\beta V . d\beta + D_\gamma V . d\gamma &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les trois équations

$$\begin{aligned} D_\alpha V + \lambda D_x U &= 0, \\ D_\beta V + \lambda D_y U &= 0, \\ D_\gamma V + \lambda D_z U &= 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \alpha D^\alpha V + \beta D_\beta V + \gamma D_\gamma V &= -(v_{m-1} + 2v_{m-2} + \ldots + mv_0) = (V), \\ \alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U &= -(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0) = (U); \end{aligned}$$

donc

$$\lambda = -\frac{(V)}{(U)}.$$

Pour avoir la surface enveloppe, il faut éliminer α, β, γ

entre les quatre équations

$$V = 0, \quad \frac{1}{(V)} D_\alpha V = \frac{1}{(U)} D_x U,$$

$$\frac{1}{V} D\ V = \frac{1}{(U)} D_y U, \quad \frac{1}{V} D_\gamma V = \frac{1}{(U)} D_z U,$$

élimination que généralement on n'est pas parvenu à effectuer; elle est possible dans quelques cas particuliers.

Soit

$$V = \frac{\alpha^m}{a^m} + \frac{\beta^m}{b^m} + \frac{\gamma^m}{c^m} - 1 = 0.$$

Les trois dernières équations deviennent

$$\frac{\alpha^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_x U = 0,$$

$$\frac{\beta^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_y U = 0,$$

$$\frac{\gamma^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_z U = 0.$$

Éliminant α, β, γ entre ces trois équations et la quatrième $V = 0$, on obtient

$$(a D_x U)^{\frac{m}{m-1}} + (b D_y U)^{\frac{m}{m-1}} + (c D_z U)^{\frac{m}{m-1}} = [-(U)]^{\frac{m}{m-1}}.$$

Lorsque $m = 2$, cette équation est de degré $2(n-1)$; si $m = n = 2$, l'équation est du second degré et de la forme

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U)^2 + c^2 (D_z U)^2 = (u_1 + u_0)^2.$$

Si le pôle est sur une courbe centrale du second degré et que la polaire soit prise par rapport à une ligne du troisième degré, l'enveloppe de cette polaire est une courbe du quatrième degré donné par l'équation

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U) = (u_2 + 2 u_1 + u_0)^2.$$

Note. Ces théorèmes sont extraits du *Calculus of operations* du Rév. Carmichael (voir le *Bulletin,* t. I^{er}, p. 83).