Nouvelles annales de mathématiques

Poudra

Solution unique et générale des questions fondamentales sur les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 217-221

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__217_0>

SOLUTION UNIQUE ET GÉNÉRALE DES QUESTIONS FONDAMENTALES SUR LES CONIQUES

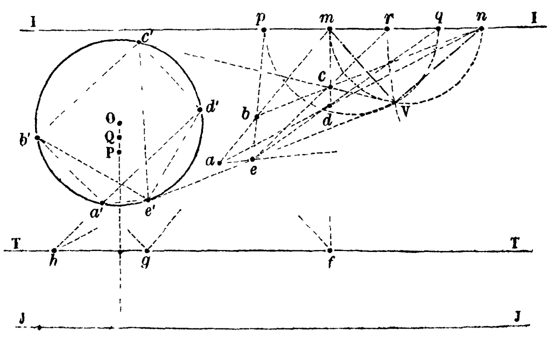
(voir tome XIII, page 394);

PAR M. POUDRA,
Officier supérieur d'état-major en retraite.

Il s'agit de trouver le centre et les axes d'une section conique non tracée et qui doit satisfaire à cinq conditions.

Nous désignerons par a, b, c, d, e des points de la courbe et par A, B, C, D, E les tangentes respectives en ces points. Cinq quelconques de ces dix quantités étant connues, la courbe est déterminée; il en résulte douze cas différents. Ne pouvant dans ce court article donner les douze solutions, nous exposerons les plus remarquables qui font connaître l'esprit de la méthode.

Dans un précédent article, nous avons fait voir comment on peut trouver, à priori, le centre et les axes d'une section conique qui résulte de la perspective d'un cercle donné. La méthode générale que nous allons employer consiste à retrouver, avec les conditions données, le cercle qui serait la perspective de la section conique.



1er Cas. *Étant donnés les cinq points* a, b, c, d, e, *trouver le centre et les axes de la section conique qui passe par ces cinq points, et cela sans avoir besoin de déterminer un autre point de la courbe.*

Il y a plusieurs solutions, nous n'en donnerons qu'une seule. Quatre des points donnés, tels que a, b, c, d, forment un quadrilatère. Soient m et n les points de concours des côtés opposés; la droite mn qui joint ces deux points sera désignée par II.

Si l'on joint le cinquième point e avec les quatre points a, b, c, d et avec m et n, on aura un faisceau de six droites en involution. Ce faisceau est coupé par la droite II aux points m et n, p et q, r et......... s qui sont alors en involution; il en résulte que si sur mn, pq, rs, comme diamètres, on décrit trois demi-circonférences, elles se couperont en un même point V. Ce sera le point de vue de la perspective.

Prenons arbitrairement une droite TT parallèle à II pour la base du tableau; alors la droite II pourra être regardée comme celle qui, dans le plan de la section conique, correspond aux points situés à l'infini dans le plan du cercle. De sorte que la perspective du quadrilatère a, b, c, d, dont les points de concours sont sur II, sera nécessairement un parallélogramme, et comme les deux directrices Vm, Vn sont rectangulaires, la figure a', b', c', d' sera un rectangle. Mais, de plus, comme les angles pVq, rVs sont aussi droits, il en résultera que le point e', perspective du cinquième point e, sera tel, que les angles $a'e'c'$, $b'e'd'$ seront droits; donc il faut que les cinq points a', b', c', d', e' soient sur une même circonférence qui sera, par conséquent, la perspective de la section conique passant par les points donnés a, b, c, d, e.

Nous avons la droite II qui, dans le plan de la section conique, correspond aux points qui, dans le plan du cercle, sont à l'infini. Mais nous avons besoin de connaître celle qui, réciproquement dans le plan du cercle, correspond aux points à l'infini dans le plan de l'ellipse. Or il suffit de mener la droite JJ parallèle TT à une distance de V égale à celle qui sépare les droites TT et II. Cela devient évident en observant que, de même que JJ représente la trace horizontale d'un plan parallèle à celui du tableau mené par V, réciproquement la droite II représente sur le plan du tableau la trace d'un plan mené par V parallèle à celui du cercle. Ce serait pour les peintres la ligne d'horizon.

En se reportant à notre premier article, on voit que le problème est résolu, car on connaît le cercle, le point V, les droites TT, JJ; par suite, on peut déterminer les pôles linéaires et circulaires P et Q, et, par conséquent, le centre et les axes de la section conique qui serait perspective du cercle et qui passerait par les cinq points donnés.

2^e^ CAS. *Connaissant trois points* a, b, c, *et deux tangentes* C *et* E, *on demande de trouver le centre et les axes de la section conique.*

On trace un cercle tangent aux deux tangentes données. Ce cercle, de rayon arbitraire, pourra être considéré comme étant la perspective de la section conique. V, le point de rencontre des deux tangentes, sera nécessairement le point de vue.

Les trois rayons visuels V*a*, V*b*, V*d* détermineront sur le cercle les trois points *a'*, *b'*, *d'*, perspectives de ceux *a*, *b*, *c*. Les droites homologues *ab* et *a' b'*, *ad* et *a' d'*, *bd* et *b' d'* se couperont deux à deux sur la droite TT qui sera ainsi déterminée. Pour trouver la droite JJ, on trace à volonté, dans le plan de la section conique, deux systèmes de deux droites parallèles; ces droites coupent celles connues *ab*, *bc*, *cd*, *de*, etc., en des points dont les perspectives seront : 1° sur les droites homologues *a' b'*, *b' c'*, *c' d'*, *d' e'*, etc., et 2° sur les rayons visuels menés de V à chacun de ces points. Donc, les droites homologues à ces deux systèmes de deux droites parallèles seront déterminées, mais elles seront concourantes en deux points de JJ qui sera donc ainsi déterminée.

La méthode employée pour ce deuxième cas peut convenir toutes les fois que parmi les données il y aura deux tangentes. Mais on sait que lorsque l'on connaît cinq points d'une section conique, on peut tracer de suite les cinq tangentes et réciproquement, et que, dans beaucoup d'autres cas, on peut encore déterminer des tangentes: nous ne donnerons donc pas les solutions directes des dix cas qui resteraient à examiner et qui peuvent se ramener la plupart à ces deux-ci.

Lorsqu'on a déterminé le cercle qui est la perspective de la section conique non tracée, on peut résoudre très-simplement divers problèmes sur cette courbe.

1°. *Par un point* a *donné sur la courbe non tracée, lui mener une tangente.*

Le point a' du cercle sur le rayon visuel $Va'a$ est la perspective de celui a. On mène la tangente en ce point a' au cercle, elle rencontre TT en un point qui, joint à celui a, donne la tangente cherchée,

2°. *Par un point* K *extérieur à la courbe non tracée, lui mener une tangente.*

Au point K correspond dans le cercle le point K′ qui en est la perspective. Par ce point K′, on mène deux tangentes au cercle, elles rencontrent TT en des points qui, joints à K, donnent les tangentes cherchées.

3°. *Mener à la section conique non tracée des tangentes parallèles à une droite donnée.*

La droite donnée K rencontre TT en un point α. Par V, on mène une parallèle à K qui coupe JJ en un point β; la droite $\alpha\beta$ est la perspective de la droite K. On mène au cercle deux tangentes parallèles à cette droite $\alpha\beta$; elles rencontrent TT en deux points par lesquels, menant deux parallèles à K, on aura les deux tangentes cherchées. Si l'on veut les points de tangence, il suffira de joindre V avec les points de contact des deux tangentes ci-dessus au cercle.

4°. *Trouver les points d'intersection de la droite* K *avec la section conique non tracée.*

A la droite K correspond, comme ci-dessus, la droite $\alpha\delta$ qui coupe le cercle en deux points. Joignant ces points à V, l'intersection de ces droites et de celle de K donnera les deux points cherchés.