NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Construction nouvelle des sections coniques par la perspective d'un cercle, donnant de suite le centre, les diamètres conjugués, les axes de la courbe

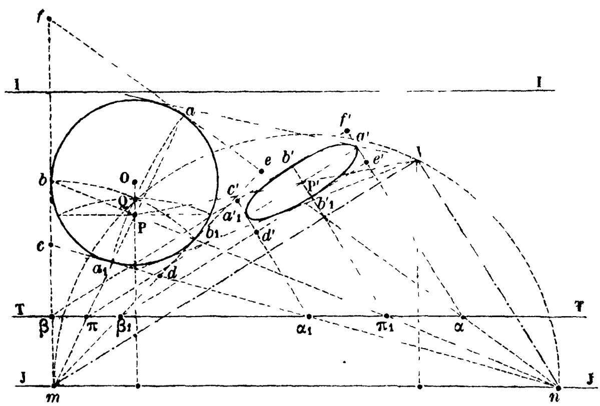
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 212-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__212_0>

CONSTRUCTION NOUVELLE

Des sections coniques par la perspective d'un cercle, donnant de suite le centre, les diamètres conjugués, les axes de la courbe;

Par M. POUDRA,
Officier supérieur d'état-major en retraite.



Pour obtenir la perspective d'une figure plane il faut distinguer :

1°. Le plan de la figure donnée, d'un cercle, par exemple (ce sera le plan horizontal de projection);

2°. Le plan vertical du tableau (soit TT sa trace horizontale);

3°. Le point de vue que nous désignerons par V.

Par le point V menons un plan parallèle à celui du tableau. Sa trace horizontale sera une droite JJ parallèle à TT.

Rabattons ce dernier plan et celui du tableau sur le plan horizontal, en les faisant tourner autour de leurs traces respectives JJ et TT; nous obtiendrons la figure ci-dessus dans laquelle le cercle, sa perspective et le point de vue seront ramenés dans un même plan.

Remarquons que tous les points du plan du cercle qui sont sur JJ passent dans la perspective à l'infini, de sorte que les droites de ce plan, qui concourent en un point de JJ, deviennent en perspective des droites parallèles.

Sur JJ prenons arbitrairement deux points m et n, joignons-les par des droites au point de vue V. Ces droites Vm, Vn seront les directrices de la construction.

Des points m et n tirons des droites à un point quelconque de la figure donnée, tel que b. La droite mb rencontrera TT en β, par lequel nous menons $\beta b'$ parallèle à la directrice Vm. La droite nb rencontre TT en π_1, par lequel nous menons $\pi_1 b'$ parallèle à l'autre directrice Vn. Les deux droites $\beta b'$, $\pi_1 b'$ se rencontrent en b' sur le rayon visuel V$b'b$. Ce point b' est la perspective de b. Quels que soient les points m et n sur JJ, on obtiendra toujours le même et unique point b' pour la perspective de b.

En répétant cette opération pour divers points de la figure donnée, on obtiendra sa perspective.

Cette nouvelle méthode de perspective peut se résumer en disant que la perspective d'une figure plane quelconque est la résultante de deux perspectives sur une droite TT prises de deux points arbitraires m et n sur JJ parallèle à TT.

D'après cette construction, on voit de suite que si le cercle est tangent à JJ sa perspective sera une parabole. S'il coupe cette droite, on aura une hyperbole. Dans le cas de la figure, ce sera une ellipse.

La droite JJ a pour pôle dans le cercle le point P. C'est-à-dire que si, d'un point quelconque de cette droite, on mène deux tangentes au cercle, la corde qui joint les deux points de contact passe toujours par P. Pour un point *m* quelconque, la corde de contact bb_1 ira rencontrer JJ en un point *n* tel, que si l'on mène deux tangentes, la corde de contact aa_1 ira passer par le premier point *m*. Les trois points *m*, *n*, P sont dits *conjugués ;* ils jouissent de cette propriété, que la polaire de l'un quelconque passe par les deux autres.

Le point P, pôle de JJ par rapport au cercle, est très-connu. Il jouit de propriétés importantes ; mais il existe un point Q aussi remarquable et dont on n'a pas fait usage jusqu'ici.

Si d'un point *m* de JJ comme centre, avec un rayon égal à la partie *mb* comprise entre le point *m* et celui *b* de tangence, on décrit une circonférence, elle passera toujours par un même point Q situé entre le centre O et le pôle P, et cela quelle que soit la position de ce point *m* sur JJ. En outre, si, sur la droite *mn* qui joint deux points conjugués, comme diamètre, on décrit une circonférence, elle passera aussi par ce point Q, quels que soient les deux points conjugués *m* et *n* sur JJ. Comme ce point Q est important et qu'il a de l'analogie avec celui P, je propose de le nommer *pôle circulaire* de JJ par rapport au cercle, tandis que P serait le *pôle linéaire*.

La connaissance de ce point Q va nous permettre de déterminer de suite le centre et les axes de la section conique sans en chercher un seul point.

Décrivons une circonférence passant par Q et V et dont le centre soit sur JJ. Par son intersection avec cette droite, elle déterminera deux points conjugués *m* et *n* tels, que les deux directrices correspondantes V*m*, V*n* seront rectangulaires. Prenons ces deux points *m* et *n* pour les points de vue auxiliaires. Il est évident : 1° qu'au point P correspondra celui P′ qui sera le centre de la courbe ; 2° aux deux droites ma_1P*a*, nb_1P*b* correspondront les deux cordes rectangulaires conjuguées $\pi' a'_1\, P' a'$ et $\pi_1\, b'_1\, P' b$ qui, passant par le centre, seront les axes de la courbe; 3° au quadrilatère circonscrit *cdef* dont les côtés opposés concourent sur JJ aux points m et n, correspondra le rectangle $c' d' e' f'$ circonscrit à l'ellipse et dont les côtés parallèles aux axes détermineront les sommets a', a'_1, b', b'_1 de la courbe.

Toute autre circonférence qui aurait son centre sur JJ et qui passerait par Q, déterminerait sur JJ deux autres points conjugués m_1, n_1 auxquels correspondraient, dans la section conique, deux diamètres conjugués dont l'angle serait égal à celui $m_1 V n_1$ formé par les nouvelles directrices $V m_1$, $V n_1$

Toutes ces circonférences qui ont leur centre sur JJ et passent par Q, se coupent encore en un deuxième point Q_1 situé symétriquement par rapport à JJ.

La connaissance du point Q nous a donné le moyen de trouver de suite le centre et les axes de la section conique qui doit résulter de la perspective d'un cercle donné. Nous ferons voir, dans un prochain article, qu'on peut, avec son secours, résoudre, dans tous les cas, le problème suivant : *Connaissant les cinq conditions auxquelles doit satisfaire une section conique cherchée, trouver de suite le centre et les axes de cette courbe sans être obligé d'en déterminer aucun autre point;* problème dont la solution générale peut avoir des applications pratiques utiles.

Dans la position V du point de vue, on trouve facilement par la construction que

$$\frac{P' a'}{P' b} = \frac{n Q}{m Q} : \frac{n V}{m V};$$

pour toute autre position V_1 on aurait une autre ellipse dont le rapport des axes serait $\frac{nQ}{mQ} : \frac{nV_1}{mV_1}$; donc il en résulte que le rapport des axes de la première sera à celui de la deuxième comme $\frac{mV}{nV} : \frac{mV_1}{nV_1}$.

Deux ellipses quelconques qu'on peut obtenir ainsi pour deux points de vue V et V_1 sont perspectives réciproques l'une de l'autre, les droites homologues se coupent toujours sur TT, mais le point de vue pour deux de ces courbes sera à l'infini ; elles seront projection l'une de l'autre, et la direction qui joint les points homologues sera celle VV_1 des deux points de vue.

En faisant varier la position du point V, on peut obtenir des ellipses dont le rapport des axes ait toutes les valeurs possibles. Ainsi, lorsque V sera sur JJ, par exemple en n, la courbe sera une droite $\alpha\alpha_1$. S'il est en Q ou Q_1, la courbe sera un cercle. Si le point V reste sur la circonférence mQn, les ellipses seront rapportées à leurs axes qui seront des droites homologues, et dans toutes ces courbes les points homologues seront sur une même circonférence dont le centre serait sur TT.

Rappelons en terminant que toutes ces courbes, parmi lesquelles il y a des droites, des cercles, des ellipses dont le rapport des axes est indéfini, deux quelconques sont projection l'une de l'autre; d'où résulte qu'à des droites parallèles dans l'une correspondront des droites parallèles dans l'autre, et que les segments sur les premières seront proportionnels aux segments sur les deuxièmes.

Il serait trop long d'exposer ici toutes les conséquences qu'on peut tirer de ces observations. Nous nous proposons, d'ailleurs, de donner, dans un autre article, toutes les propriétés de l'ellipse qui se déduisent, presque à vue, de celles du cercle.