BRIOSCHI

Sur les questions 241 et 141

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 20-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__20_0>

SUR LES QUESTIONS 241 ET 141;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

Question 241. — Théorème d'Euler démontré par M. Loxhay. (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 424).

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots,\ A_r$$

sont les termes d'une série récurrente; si l'on a

$$A_{r+2} = a\,A_{r+1} + b\,A_r,$$

on a aussi

$$\frac{A_{r+1}^2 - a\,A_r\,A_{r+1} + b\,A_r^2}{b^r} = \text{const.}$$

Théorème plus général. En supposant

$$A_{r+s} = a_1 A_{r+s-1} + a_2 A_{r+s-2} + \ldots + a_s A_r,$$

on a

$$\frac{1}{a_s^r}\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = \text{const.}$$

En effet, en substituant au lieu des éléments de la dernière ligne de ce déterminant les valeurs données par l'équation caractéristique, on a :

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots A_{r+s} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = (-1)^{(s-1)}\, a_s \begin{vmatrix} A_{r-1} & A_r \ldots & A_{r+s-2} \\ A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_{r+s-2} & A_{r+s-1} \ldots & A_{r+2s-3} \end{vmatrix}.$$

et, par conséquent (*) :

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_r \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = (-1)^{r(s-1)}\, a_s^r \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \ldots & A_{s-1} \\ A_1 & A_2 \ldots & A_s \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_{s-1} & A_s \ldots & A_{2s-2} \end{vmatrix}.$$

(*) Tous les a, à l'exception de a_s, s'en vont; ensuite on passe de A_{r-1} à A_{r-2}, de là à A_{r-3}, etc.

Si, dans le premier membre de cette équation, on met pour A_{r+s}, A_{r+s+1} etc., leurs valeurs données par l'équation caractéristique, on a

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{r+s-1}) = a_s^r \cdot \text{const.}$$

La question 141 (t. VI, p. 134) est un théorème énoncé par Fourier (*). M. Tardy (**) pense qu'il s'est glissé quelque erreur dans ce qu'avance Fourier à propos de l'application du même théorème à la recherche des racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes. Je suis conduit à partager l'opinion de mon savant ami en m'appuyant sur les considérations suivantes.

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines; je suppose

$$(1) \qquad A_r = \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}},$$

et je considère les deux séries récurrentes

$$L_0, L_1, \ldots, L_r, \ldots, \qquad M_0, M_1, \ldots, M_r, \ldots,$$

dans lesquelles

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+2} & A_{r+3} \end{vmatrix}, \qquad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix}.$$

En substituant pour A_r, A_{r+1}, etc., les valeurs données par l'équation (1), on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}}, & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+2}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+3}}, & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+4}} \end{vmatrix} = \sum_s \sum_t \frac{c_s c_t}{(x_s x_t)^{r+1}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_t} \\ \frac{1}{x_s^2} & \frac{1}{x_t^3} \end{vmatrix},$$

(*) *Analyse des équations déterminées*, Exposé synoptique, p. 72.
(**) *Nouvelles Annales*, janvier 1854.

c'est-à-dire,

$$L_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s\, c_t}{(x_s\, x_t)^{r+3}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t^2 - x_s^2),$$

et analoguement,

$$M_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s\, c_t}{(x_s\, x_t)^{r+2}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t - x_s).$$

J'observe que les séries des quotients $\frac{L_r}{L_{r-1}}$, $\frac{M_r}{M_{r-1}}$ ne peuvent avoir pour limites que le produit $x_s\, x_t$ des deux premières racines de la proposée; et cela est contraire à ce qu'avance Fourier à propos de la première série $\frac{L_r}{L_{r-1}}$.

Mais nous pouvons former une autre série de termes de la forme $\frac{L_r}{M_{r+1}}$, qui évidemment a pour limite la somme $x_s + x_t$ des deux premières racines.

Pour déterminer les trois premières racines on pourra former trois séries récurrentes:

$L_0, L_1, \ldots, L_r, \ldots;$ $M_0, M_1, \ldots, M_r, \ldots;$ $N_0, N_1, \ldots, N_r, \ldots,$

en posant

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+} \\ A_{r+3} & A_{r+} & A_{r+} \\ A_{r+2} & A_{r+3} & A_{r+4} \end{vmatrix}, \qquad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & A_{r+3} \\ A_{r+3} & A_{r+4} & A_{r+5} \end{vmatrix},$$

$$N_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & A_{r+3} \\ A_{r+2} & A_{r+3} & A_{r+4} \end{vmatrix}.$$

En effet, on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}} & \sum \frac{c_t}{x_t^{r+2}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+3}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+5}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+6}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+}} \end{vmatrix},$$

ou

$$L_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s c_t c_i}{(x_s x_t x_i)^{r+4}} \cdot \frac{1}{x_t x_i^2} \begin{vmatrix} x_s^3 & x_t^3 & x_i^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_s & x_t & x_i \end{vmatrix},$$

ou bien

$$L_r = -\sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s\ c_t\ c_i}{(x_s\ x_t\ x_i)^{r+4}} \cdot \frac{\Delta(x_s + x_t + x_i)}{x_t . x_i^2};$$

et analoguement

$$M_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s\ c_t\ c_i}{(x_s\ x_t\ x_i)^{r+4}} \cdot \frac{\Delta(x_s x_t + x_s x_i + x_t x_i)}{x_t . x_i^2},$$

$$N_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s c_t c_i}{(x_s x_t x_i)^{r+3}} \cdot \frac{\Delta}{x_t x_i^2},$$

ayant posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_s^2 & x_t^2 & x_i^2 \\ x_s & x_t & x_i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les trois séries composées des quotients $\frac{L_r}{L_{r-1}}$, $\frac{M_r}{M_{r-1}}$, $\frac{N_r}{N_{r-1}}$ ne peuvent donner que le produit $x_s\ x_t\ x_i$; mais les deux séries $\frac{L_r}{N_{r+1}}$, $\frac{M_r}{N_{r+1}}$ peuvent donner la somme $x_s + x_t + x_i$ des trois premières racines, et la somme des produits deux à deux $x_s\ x_t + x_s\ x_i + x_t\ x_i$.

Quoique, pour l'application des séries récurrentes à la recherche des racines selon les vues de Fourier, il n'y ait besoin que des séries qui donnent les sommes et les produits des racines; cependant je vais donner le moyen de former aussi les autres séries en considérant s racines. Je nomme $L_{r,1}$, $L_{r,2}, \ldots, L_{r,s}$ les termes généraux de ces séries récurrentes, et je pose

$$L_{r,s} = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix}.$$

On obtient $L_{r,1}$ en substituant aux éléments de la seconde ligne de $L_{r,s}$ les éléments suivants :

$$A_{r+s},\ A'_{r+s+1},\ldots, A_{r+2s-1};$$

de même on obtient $L_{r,2}$ en substituant aux éléments de la troisième ligne de $L_{r,s}$ ces dernières quantités, et ainsi de suite. Les séries des quotients

$$\frac{L_{r,1}}{L_{r,s}},\ \frac{L_{r,2}}{L_{r,s}},\ldots,\ \frac{L_{r,s-1}}{L_{r,s}},$$

donnent la somme des racines, la somme des produits deux à deux, la somme des produits à $s-1$ à $s-1$, et chacune des séries $\frac{L_{r,1}}{L_{r-1,1}}$, $\frac{L_{r,2}}{L_{r-1,2}}$, etc., donnera le produit des racines.

L'exposé synoptique des recherches de Fourier sur l'application des séries récurrentes à la résolution des équations se termine par ces paroles : « *Au reste, nous ne pensons point que l'on parvienne assez promptement par cette voie à la connaissance des racines. Les exemples cités par Euler sont ingénieusement choisis, mais ce mode d'approximation exige en général trop de calculs. Nous ne considérons donc cette question que sous les rapports théoriques.* » C'est pour cela que je crois inutile d'entrer en de plus longs détails.