A. GENOCCHI

Sur les ovales de Descartes (voir t. IX, p. 183)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 202-207

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__202_1>

SUR LES OVALES DE DESCARTES

(voir t. IX, p. 183);

Par M. A. GENOCCHI.

M. W. Roberts a trouvé, en employant les coordonnées elliptiques, que l'arc d'un ovale de Descartes s'exprime par une fonction ultra-elliptique dans laquelle la quantité soumise au signe radical monte jusqu'au septième degré (Journal de M. Liouville, tome XV, page 196). On obtient un résultat plus simple par les coordonnées polaires : si l'on prend pour variable indépendante l'angle polaire, le polynôme soumis au radical ne monte qu'au cinquième degré.

Soient c la distance des deux foyers de la courbe, ρ et ρ' les deux rayons vecteurs de l'un quelconque de ses points, ω l'angle formé par le rayon vecteur ρ avec la ligne des foyers prise pour axe : on aura, m et n étant deux constantes,

$$\rho' = m\rho + n$$

et

$$\rho'^2 = c^2 + \rho^2 - 2c\rho\cos\omega;$$

d'où, en posant

$$\frac{c}{1-m^2} = a, \quad \frac{mn}{1-m^2} = b, \quad \frac{n^2-c^2}{1-m^2} = k,$$

on tire l'équation des ovales

$$\rho^2 - 2\rho(a\cos\omega + b) = k,$$

et, en différentiant,

$$d\rho\,(\rho - a\cos\omega - b) + a\rho\,d\omega\sin\omega = 0.$$

Or, si de ces deux équations on déduit les valeurs de $\cos\omega$, $\sin\omega$, $d\omega$ en fonction de ρ et $d\rho$, et qu'on substitue celle de $d\omega$ dans la formule

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

on trouve

$$ds = 2\,\frac{\sqrt{a^2\rho^2 + \rho(\rho - b)(b\rho + k)}}{\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 - 2b\rho - k)^2}}\,d\rho,$$

de manière que la différentielle ds de l'arc de la courbe renfermera deux radicaux, et, en les réduisant à un seul par la multiplication, on obtiendra sous le signe un polynôme en ρ du septième degré. Mais si, au contraire, on résout l'équation de la courbe par rapport à ρ, il vient

$$\rho - a\cos\omega - b = \pm\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2},$$

et comme on a d'un autre côté

$$d\rho = -\frac{a\rho\,d\omega\sin\omega}{\rho - a\cos\omega - b},$$

et, par suite,

$$ds = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\omega + (\rho - a\cos\omega - b)^2}}{\rho - a\cos\omega - b}\,\rho\,d\omega,$$

on en conclut

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}\left(d\omega \pm \frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2}}\right).$$

d'où

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}$$
$$\pm \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}}{\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2}} (a\cos\omega + b)\,d\omega.$$

L'expression de l'arc s sera donc la somme de deux intégrales : la première se ramène immédiatement à un arc d'ellipse, car, en faisant

$$\omega = 2\varphi, \quad (a+b)^2 + k = p, \quad 4ab = q,$$

on la met sous la forme

$$2\int d\varphi \sqrt{(p - q\sin^2\varphi)};$$

la deuxième intégrale, en posant

$$\cos\omega = x, \quad a^2 + b^2 + k = r,$$

deviendra

$$\mp \int \frac{(ax + b)(r + 2abx)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(r + 2abx)(k + b^2 + 2abx + a^2x^2)}},$$

transcendante abélienne, dans laquelle la quantité soumise au radical est une fonction entière de x du cinquième degré.

Cette seconde intégrale se réduit elle-même à un arc d'ellipse, si $k = 0$, puisque alors elle est égale à la première. Dans ce cas l'équation de la courbe se décompose en

$$\rho = 0, \quad \text{et} \quad \rho = 2(a\cos\omega + b),$$

et représente ainsi un point isolé qui est le pôle, et une ligne courbe. Cette courbe est en même temps une conchoïde circulaire et une épicycloïde, et a été étudiée par M. Quetelet comme la *caustique secondaire* par réflexion dans le cercle (*Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, tome III, page 131) : elle est connue sous le nom de *limaçon de Pascal* (*).

(*) Cette dénomination a été introduite par Roberval. (*Voir* un Memoire de Lahire dans le volume de l'Académie des Sciences de Paris pour 1708, Si l'on fait

$$h = -(a-b)^2,$$

on trouve, en réduisant,

$$s = 2\sqrt{ab}\int d\omega \cos\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{2b}\int\frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{a\cos\omega - a + 2b}}:$$

cette expression se ramène aussi aux fonctions elliptiques; car on a

$$\int d\omega \cos\frac{1}{2}\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega + \text{const.},$$

et, en posant

$$\omega = 2\varphi,$$

on partage l'intégrale

$$\int\frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{a\cos\omega - a + 2b}},$$

en deux intégrales elliptiques

$$(a-b)\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{b - a\sin^2\varphi}} + \sqrt{2}\int d\varphi\sqrt{b - a\sin^2\varphi},$$

l'une de première, l'autre de seconde espèce.

Mais il faut remarquer que la courbe correspondante est encore un limaçon de Pascal. Prenons en effet, sans changer d'axe polaire, un nouveau pôle à la distance $a-b$ du premier, et nommons ρ', ω' les nouvelles coordonnées : nous aurons

$$\rho^2 = \rho'^2 + (a-b)^2 + 2\rho'(a-b)\cos\omega',$$
$$\rho'^2 = \rho^2 + (a-b)^2 - 2\rho(a-b)\cos\omega,$$

et l'équation de la courbe donnera

$$[\rho^2 - 2a\rho\cos\omega + (a-b)^2]^2 = 4b^2\rho^2,$$

---

page 46. M. Quetelet appelle *limaçon de Pascal* la courbe qui repond au cas particulier $a = 2b$. (Voir *loco cit.*, p. 98 et 101.)

d'où, éliminant ρ^2 et $\rho\cos\omega$, on déduit sans peine

$$(\rho'^2 - 2b\rho'\cos\omega')^2 = 4ab\rho'^2,$$

c'est-à-dire

$$\rho' = 0 \quad \text{et} \quad \rho' = 2\left(b\cos\omega' + \sqrt{ab}\right).$$

On a ainsi deux expressions de l'arc du limaçon, et l'on voit que leur rapprochement nous conduit à ce théorème connu, qu'une fonction elliptique de première espèce s'exprime par deux arcs d'ellipse. On peut aussi en conclure la transformation analytique propre à opérer cette réduction.

Si les coefficients a et b étaient affectés de signes contraires, il faudrait supposer $k = -(a+b)^2$, et prendre le nouveau pôle à la distance $a+b$ de l'ancien.

En remplaçant ρ par $\frac{1}{m}\rho^2$, et ω par 2ω dans l'équation

$$\rho^2 - 2\rho(a\cos\omega + b) + (a-b)^2 = 0,$$

il vient

$$\left(\frac{1}{m}\rho^2 + a - b\right)^2 = 4\frac{a}{m}\rho^2\cos^2\omega,$$

d'où

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega\sqrt{am} + m(a-b) = 0,$$

équation d'un cercle. On transforme donc par cette substitution les limaçons en cercles : réciproquement, on transformera les cercles en limaçons, en remplaçant ρ et ω par $\sqrt{m\rho}$ et $\frac{1}{2}\omega$. Ainsi il est visible que ce moyen, employé par MM. Chasles et W. Roberts pour obtenir les ovales de Descartes, fournit seulement le limaçon de Pascal, comme l'a remarqué M. Cayley (Journal de M. Liouville, tome XV, page 354). Il s'ensuit, en particulier, que l'ovale mentionné dans le théorème, dont M. P. Serret a indiqué la démonstration dans les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 321, n'est aussi qu'un limaçon.

L'équation des ovales donne deux valeurs de ρ pour chaque valeur de ω : ces valeurs seront toujours réelles, si la quantité k est positive, mais seront de signes contraires ; elles seront toujours imaginaires, si k est négative et $\sqrt{-k}$ surpasse la différence entre les valeurs numériques de a et b; enfin, il y en aura des imaginaires et des réelles, lorsque, k étant négative, cette valeur est comprise entre a et b.