E. PROUHET

Sur les racines imaginaires (Extrait d'une Lettre de M. E. Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 199-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__199_1>

SUR LES RACINES IMAGINAIRES.

(Extrait d'une Lettre de M. E. PROUHET.)

La lettre de M. Vallès, insérée dans le numéro de décembre dernier (1854), m'a suggéré plusieurs réflexions, que je crois devoir vous communiquer, quoiqu'elles ne soient, en partie, que le développement d'une note fort judicieuse placée en bas de la page 461. Peut-être ne regarderez-vous pas comme inutiles quelques considérations qui me paraissent propres à mettre dans un plus grand jour un point de doctrine fort important.

A mon avis, les auteurs qui cherchent à *interpréter* les symboles imaginaires oublient trop souvent de faire, sur l'origine de ces symboles, une distinction capitale, et ils font, par là, le plus grand tort à ce qu'il peut y avoir de bon et de véritablement utile dans leurs recherches.

Cette distinction, la voici : Les inconnues qui entrent dans une question peuvent être ou des *inconnues principales*, c'est-à-dire les quantités mêmes que l'on cherche, ou du moins des quantités sans lesquelles l'objet que l'on veut déterminer ne saurait exister ; ou des *inconnues auxiliaires*, introduites dans le calcul en vue de quelque avantage spécial, mais sans lesquelles l'objet en question peut très-bien exister.

Lorsqu'on trouve pour une *inconnue principale* une expression imaginaire, c'est un signe infaillible que la question proposée est impossible. Vous cherchez un point qui remplisse une certaine condition ; vous trouvez qu'une de ses coordonnées est imaginaire : donc il n'existe pas de point qui remplisse la condition demandée.

Lorsque le calcul donne une expression imaginaire pour une inconnue auxiliaire, cela indique que cette quantité n'existe pas, mais non pas que le problème est impossible. Exemple : Vous trouvez commode, pour déterminer l'axe radical de deux cercles, de calculer les coordonnées de leurs points d'intersection et d'en déduire l'équation de la droite cherchée; mais ces coordonnées peuvent être imaginaires, c'est-à-dire que les cercles peuvent ne pas se couper, et cependant l'axe radical existe. Il arrive même que ces coordonnées, traitées comme des quantités réelles, donnent encore l'équation de l'axe radical, résultat d'ailleurs confirmé par d'autres méthodes. Ce résultat, singulier au premier abord, tient à ce que les coefficients de la droite cherchée dépendent de la *forme* des expressions *générales* trouvées pour les coordonnées, *forme* qui subsiste alors que l'expression n'a plus de signification propre.

Cela posé, il est facile de voir que les assertions de M. Vallès ne sont vraies qu'à moitié. Lorsqu'il parle de combler l'abîme entre le réel et l'imaginaire, il oublie la distinction que nous venons de faire. Cet abîme existe bien réellement quand il s'agit d'inconnues principales, parce qu'il n'y a pas, je crois, de milieu entre *être* et *ne pas être*. L'approximation n'a rien à faire ici; mais, dans le cas des inconnues auxiliaires, M. Vallès a raison, et des valeurs approchées de quantités imaginaires peuvent servir à calculer, par approximation, des quantités dont la réalité est d'ailleurs hors de doute.

Je ne puis être d'accord avec M. Vallès lorsqu'il dit : « C'est un fait très-surprenant que celui qui, au moyen de la plus petite altération dans les coefficients d'une équation peut faire passer les racines de cette équation du réel à l'imaginaire, et *vice versâ* » (page 450). Le fait ne me semble pas surprenant du tout, à moins qu'on ne regarde comme un paradoxe cette proposition inoffensive : Quand on est sur la frontière d'un pays, le plus petit déplacement peut vous faire passer du dedans au dehors, et *vice versâ*.

Puisque je suis sur le sujet des interprétations, permettez-moi encore d'ajouter quelques mots sur certaines doctrines assez répandues et qui me semblent être une déviation bien prononcée de la logique du bon sens.

Qu'est-ce qu'interpréter un résultat de calcul? C'est, il me semble, chercher en quoi ce résultat répond à la question proposée, en admettant même parmi les réponses possibles celle-ci : Ce que vous demandez n'existe pas.

Cela paraît très-simple et très-naturel ; mais il y a des esprits auxquels le simple et le naturel ne suffisent pas. Quand ils ont trouvé un symbole d'impossibilité, ils le torturent de toutes les manières pour y trouver, au lieu de la réponse qui saute aux yeux, une réponse à une question nouvelle, peu différente, à ce qu'ils disent, de la première, et à laquelle ils ne songeaient pas d'abord. Ces modifications légères consistent à changer une perte en gain, à faire aller un courrier de droite à gauche, au lieu qu'il allait d'abord de gauche à droite, etc. A cela près, c'est toujours la même question.

D'autres auteurs prétendent qu'un résultat de calcul sert quelquefois à *rectifier* un énoncé. Singulière assertion! Le calculateur ne savait donc pas ce qu'il demandait? Et s'il ne le savait pas, comment le calcul peut-il le lui apprendre!

Je conclus de tout cela que, lorsqu'on fait de l'algèbre, il ne faut pas se défaire du sens commun, don rare et précieux auquel $a + b$ ne suppléera jamais.

Cette Lettre étant déjà bien longue, je remets à une autre occasion pour vous entretenir de quelques tentatives faites pour résoudre la question laissée intacte par M. Vallès, savoir, celle des caractères auxquels on peut reconnaître l'existence des racines en faisant varier les coefficients approchés dans les limites de l'approximation supposée.

31 décembre 1854.