NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAURE

Solution de la question 290

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 198-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__198_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 290;

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

Trouver le coefficient de x^{n-1} dans l'équation en x de degré $n+1$ qui a pour racines les $n+1$ coefficients binomiaux de $(a+b)^n$.

Ce coefficient, que je désigne par A, est égal à la somme des produits deux à deux des coefficients du développement de $(a+b)^n$.

Or, si l'on multiplie entre eux deux binômes tels que $(1+\alpha)^n$ et $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n$, on aura (en faisant $\alpha=1$) dans le produit la somme cherchée, et en outre la somme des carrés des coefficients binomiaux, somme que j'appelle B. Donc

$$2^{2n} = 2\mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

Or, d'après les deux développements

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n = 1 + n\frac{1}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{\alpha^2} + \ldots,$$

B s'obtient en multipliant terme à terme ces deux séries; de sorte que l'on peut aussi regarder cette quantité comme étant le terme indépendant de α dans le développement de

$$(1+\alpha)^n\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n}(1+\alpha)^{2n}.$$

On a donc

$$\mathrm{B} = \frac{2n(2n-1)\ldots n+1}{1\;2\;3\;..\;n};$$

de là

$$A = 2^{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n-1}.$$