NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAURE

# Note sur les valeurs que prennent les racines des équations du 3e et 4e degré lorsque le coefficient du premier terme est nul (voir tome IV, p. 382)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 14 (1855), p. 194-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__194_1>

# NOTE

## Sur les valeurs que prennent les racines des équations du 3^e et 4^e degré lorsque le coefficient du premier terme est nul

(voir tome IV, p. 382);

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

La méthode que j'indique ici est celle que l'on suit ordinairement pour le second degré. Je suppose que le lecteur a sous les yeux l'article d'Eisenstein où il traite de la résolution générale des équations des quatre premiers degrés (tome VIII, page 110).

**1.** L'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho\psi(\alpha) + \rho^2\psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho^2\psi(\alpha) + \rho\psi(\beta)].$$

On a d'ailleurs, d'après l'article cité,

$$\alpha = -b^3 + \frac{1}{2}a[\varphi(c) - ad + 3bc];$$

nous écrirons simplement

$$\alpha = -b^3 + k;$$

$k$ contient ainsi $a$ en facteur. On aura alors

$$\psi(\alpha) = -b + \frac{k}{3b^2} + \ldots,$$

en ne prenant que les deux premiers termes de la racine cubique de $\alpha$, tous les autres termes contenant au moins le facteur $a^2$.

On a de même

$$\psi(\beta) = -b + \frac{k'}{3b^2} + \ldots.$$

Remplaçant dans les expressions de $x$, on trouve

$$x = \frac{1}{a}\left[-3b + \frac{k+k'}{3b^2} + \ldots\right],$$
$$x = \frac{1}{a}\left[-b(1+\rho+\rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho + k'\rho^2) + \ldots\right],$$
$$x = \frac{1}{a}\left[-b(1+\rho+\rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho^2 + k'\rho) + \ldots\right]:$$

ayant égard à la valeur de $\rho$, qui est l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, supprimant le facteur $a$ et faisant ensuite $a = 0$, on trouve facilement que les valeurs précédentes se réduisent à

$$x = \infty,$$
$$x = \frac{1}{6b}[-3c + \varphi(9c^2 - 12bd)],$$
$$x = \frac{1}{6b}[-3c - \varphi(9c^2 - 12bd)];$$

les deux dernières sont les racines de l'équation du second degré,

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

2. Je prends maintenant l'équation générale du qua-

trième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

elle donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

avec

$$\gamma = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\ \varphi(\zeta) + \ \psi(\eta)] = b^2 - ac + k,$$

$$\delta = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\rho\varphi(\zeta) + \rho^2\psi(\eta)] = b^2 - ac + k',$$

$$\varepsilon = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\rho^2\varphi(\zeta) + \rho\varphi(\eta)] = b^2 - ac + k''.$$

Je prends les racines carrées de ces quantités et je remarque que le produit $\varphi(\gamma)\,\varphi(\delta)\,\varphi(\varepsilon)$ devant être égal à

$$-b^3 - \frac{1}{2}a^2 d + \frac{3}{2}abc,$$

il est nécessaire de prendre pour deux des radicaux $\varphi(\gamma)$ et $\varphi(\varepsilon)$, par exemple, le signe $+$ et le signe contraire pour $\varphi(\varepsilon)$. De là

$$\varphi(\gamma) = \quad b + \frac{1}{2b}(k - ac + \ldots),$$

$$\varphi(\delta) = \quad b + \frac{1}{2b}(k' - ac + \ldots),$$

$$\varphi(\varepsilon) = -b - \frac{1}{2b}(k'' - ac + \ldots).$$

Les termes omis contiennent au moins le facteur $a^2$. On a donc, pour la première des valeurs de $x$,

$$x=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2b}(k+k'-k''-ac)+\dots\right];$$

mais

$$\begin{aligned} k+k'-k'' &= \frac{1}{2}a[\psi(\zeta)(1+\rho-\rho^2)+\psi(\eta)(1-\rho+\rho^2)] \\ &= -a\,[\rho^2\psi(\zeta)+\rho\psi(\eta)], \end{aligned}$$

d'où, en supprimant un facteur $a$ et faisant ensuite $a=0$,

$$x=\frac{1}{2b}-c-\rho^2\psi(\zeta_0)-\rho\psi(\eta_0),$$

en indiquant par $\zeta_0$ et $\eta_0$ ce que deviennent $\zeta$ et $\eta$ lorsqu'on y fait $a=0$.

On trouve de même, pour les trois autres valeurs,

$$x=\frac{1}{2b}[-c-\rho\varphi(\zeta_0)-\rho^2\varphi(\eta_0)],$$

$$x=\frac{1}{2b}[-c-\psi(\zeta_0)-\psi(\eta_0)],$$

$$x=\infty.$$

Les trois premières valeurs sont les racines de l'équation du troisième degré

$$4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,$$

car, d'après l'article d'Eisenstein, on a

$$\zeta_0=\frac{9E_0+\varphi(3F_0)}{9},\quad \eta_0=\frac{9E_0-\varphi(3F_0)}{9},$$

$$E_0=b^2e-2bcd+c^3,$$

$$F_0=9b^2(3b^2e^2-4c^2d^2-12bcde+6c^3e^3)+64b^3d^3$$