NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

O. HESSE

Théorèmes sur la disparition des rectangles dans les fonctions homogènes entières quadratiques à n variables, applications géométriques aux lignes et surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 178-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__178_1>

THÉORÈMES

Sur la disparition des rectangles dans les fonctions homogènes entières quadratiques à n variables, applications géométriques aux lignes et surfaces du second degré;

D'APRÈS M. O. HESSE,
Professeur à l'Université de Königsberg.

(CRELLE, t. XX, p. 285; 1840.)

1. *Notation*. Étant données les n variables x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$, le symbole $\sum a_{\varkappa,\lambda} . x_\varkappa . x_\lambda$ signifie qu'il faut donner à $\varkappa$ et à λ toutes les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, et poser

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}.$$

D'après cette convention, un rectangle aura pour coefficient 2; ainsi le symbole renferme $\frac{n(n+1)}{2}$ termes, savoir n carrés et $\frac{n(n-1)}{2}$ rectangles. Prenons, par exemple, $n = 3$; alors le symbole désigne la fonction

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3;$$

car

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}.$$

Soient n autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, écrivons

(1) $$x_\lambda = x_\lambda^{(1)} y_1 + x_\lambda^{(2)} y_2 + \ldots + x_\lambda^{n} y_n,$$

et donnant à λ les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient n équations de relation entre les variables x et les n variables y, dans lesquelles entrent n^2 coefficients, et où $x_\lambda^{(p)}$ est le coefficient de la variable y_p. Si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 &= x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 &= x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3. \end{aligned}$$

2. Substituant les valeurs de x_λ tirées des n équations (1) dans la fonction

$$\sum a_{\kappa,\lambda} . x_\kappa . x_\lambda,$$

on obtient une fonction quadratique entière homogène en y. Si l'on donne aux n^2 coefficients indéterminés $x_\lambda^{(p)}$ des valeurs telles, que les rectangles disparaissent, on aura

(2) $$\sum a_{\kappa,\lambda} . x_\kappa . x_\lambda = G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots + G_n y_n^2,$$

et ces équations de condition

(3) $$\left\{\begin{aligned} 0 = x_1^{(p)} \frac{d \sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_1^{(q)}} &+ x_2^{(p)} \frac{d \sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{dx_2^{(q)}} + \ldots \\ &+ x_n^{(p)} \frac{d \sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d . x_n^{(q)}}, \end{aligned}\right.$$

(4) $$G_p = \sum a_{\kappa,\lambda} x_\kappa^{(p)} x_\lambda^{(p)};$$

en donnant dans (3) à p et q les valeurs *diverses* de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ équations entre les n^2 coefficients $x_\lambda^{(p)}$ qui expriment que les rectangles ont disparu. En effet, la substitution faite, ordonnons ce qui multiplie le rectangle $y_p y_q$, d'après les coefficients $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}$, alors $x^{(p)}$ sera multiplié par

$$2a_{11}x_1^{(q)} + a_{12}x_2^{(q)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(q)};$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\sum a_{1\gamma}\, x_1^{(q)} x_\gamma^{(q)}}{dx_1^{(q)}},$$

en donnant à $\varkappa$ toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n. De même, pour ce qui multiplie $x_2^{(p)}$, etc., on est ainsi amené au système (3). Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} &x_1^{(1)}\left[a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} + a_{13}x_3^{(2)}\right] \\ +\, &x_2^{(1)}\left[a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)}\right] \\ +\, &x_3^{(1)}\left[a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)}\right] = 0, \end{aligned}$$

et une seconde équation en changeant les indices supérieurs 1 en 2 et 2 en 3, et laissant les indices inférieurs, on déduit de même une troisième équation de la seconde.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations (3) renferment n^2 indéterminées; par conséquent on peut donner des valeurs arbitraires à $\frac{n(n+1)}{2}$ de ces indéterminées; les n équations (4) donnent les n valeurs de G_p.

Il est évident que les équations (3) ne changent pas en remplaçant p par q, et *vice versâ*.

Prenons n nouvelles variables $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}$, et établissons la relation suivante entre les x et ces variables

$$(5) \qquad x_\lambda = x_\lambda^{(n+1)} y_{n+1} + x_\lambda^{(n+2)} y_{n+2} + \ldots + x_\lambda^{(2n)} y_{2n},$$

et λ prenant toutes les valeurs de la suite 1, 2,..., n; substituant ces valeurs dans la fonctions $\sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa . x_\lambda$, et faisant disparaître les rectangles, la fonction se réduit à

$$-G_{n+1}\, y^2_{n+1} - G_{n+2}\, y^2_{n+2} - \ldots - G_{2n}\, y^2_{2n},$$

et l'on a comme ci-dessus :

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = x_1^{(n+p)} \dfrac{d \sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{dx_1^{(n+q)}} \\ \quad + x_2^{(n+p)} \dfrac{d \sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{dx_2^{(n+q)}} + \ldots \\ \quad + x_n^{(n+p)} \dfrac{d \sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)}}{dx_n^{(n+q)}}, \end{array} \right.$$

$$(7)\qquad - G_{n+p} = \sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa^{(n+q)}\, x_\lambda^{(n+q)};$$

mettant à la place de p et q les *diverses* valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition.

Or les $n(n-1)$ équations (3) et (6) renferment les $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes $a_{\kappa,\lambda}$, ou plutôt les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ rapports entre ces constantes et l'une d'entre elles; éliminant ces constantes, on obtient $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations entre les $2n^2$ coefficients $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$,..., $x_{2n}^{(2n)}$; mais nous allons voir que ces équations peuvent être remplacées par d'autres plus symétriques et n'exigeant pas autant d'éliminations.

3. A cet effet, si des équations (1) nous déduisons *vice versâ*,

(8) $$y_\lambda = X_1^{(\lambda)} x_1 + X_2^{(\lambda)} x_2 + \ldots + X_n^{(\lambda)} x_n;$$

on a

(9) $$\left\{\begin{array}{l} 1 = x_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\lambda)} X_n^{(\lambda)}, \\ 0 = x_1^{(\varkappa)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\varkappa)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\varkappa)} X_n^{(\lambda)}, \\ 1 = x_\lambda^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\lambda^{(n)} X_\lambda^{(n)}, \\ 0 = x_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)}. \end{array}\right.$$

On obtient les deux premières équations en plaçant les valeurs des x déduites de (1) dans l'équation (8), et les deux dernières en plaçant les y déduites de (8) dans l'équation (1).

Mettant la valeur de y_λ dans l'équation (2), on obtient

(10) $$a_{\varkappa,\lambda} = G_1 X_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + G_2 X_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + G_n X_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)};$$

ayant égard aux équations (9), on trouve les n équations suivantes :

(11) $$\left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1^{(p)} + a_{12} x_2^{(p)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(p)} = G_p X_1^{(p)}, \\ a_{21} x_1^{(p)} + a_{22} x_2^{(p)} + \ldots + a_{2n} x_n^{(p)} = G_p X_2^{(p)}, \\ a_{n1} x_1^{(p)} + a_{n2} x_2^{(p)} + \ldots + a_{nn} x_n^{(p)} = G_p X_n^{(p)}. \end{array}\right.$$

On tire de ces équations :

(12) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1^{(p)}}{G_p} = A_{1,1} X_1^{(p)} + A_{1,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{1,n} X_n^{(p)}, \\ \dfrac{x_2^{(p)}}{G_p} = A_{2,1} X_1^{(p)} + A_{2,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{2,n} X_n^{(p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_n^{(p)}}{G_p} = A_{n,1} X_1^{(p)} + A_{n,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{n,n} X_n^{(p)}, \end{array}\right.$$

où les A sont des fonctions des a et l'on a aussi $A_{\varkappa,\lambda} = A_{\lambda,\varkappa}$; ces équations sont représentées par celle-ci,

$$\frac{x_\varkappa^{(p)}}{G_p} = A_{\varkappa,1}\, X_1^{(p)} + A_{\varkappa,2}\, X_2^{(p)} + \ldots + A_{\varkappa,n}\, X_n^{(p)},$$

en donnant à $\varkappa$ les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n.

Si nous multiplions cette équation par $x_\lambda^{(p)}$, et donnant à p les valeurs 1, 2, 3,..., n, on obtient n équations, dont l'addition donne

$$(13) \quad \left\{ A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots + \frac{x_\varkappa^{(n)} x_\lambda^{(n)}}{G_n}; \right.$$

la formule (5) fournit de même

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} -A_{\varkappa,\lambda} = {} & \frac{x_\varkappa^{(n+1)} x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)} x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots \\ & + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}, \end{aligned} \right.$$

ajoutant, on a

$$(15) \quad \left\{ 0 = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}. \right.$$

En donnant à $\varkappa$ et à λ toutes les valeurs égales et diverses de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n+1)}{2}$ équations symétriques, entre les coefficients $x_\lambda^{(x)} x_\lambda^{(n+x)}$ et les quantités G_1, G_2,..., G_{2n}; éliminant ces $2n$ quantités, qui tiennent lieu de $2n-1$ rapports, on parvient à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations entre les coefficients $x_\lambda^{(x)}$, etc; qu'on obtient également comme on a vu ci-dessus par l'élimination des constantes entre les équations (3) et (6).

Il est facile de voir que des équations (15), on peut revenir aux équations (3) et (6); il suffit de décomposer l'équation (15) en deux autres de la forme (13) et (14); et il y a $\frac{1.2.3\ .\ 2n}{2(1.2.3\ldots n)^2}$ de ces décompositions. Posant ensuite les équations (9), on dérive de l'équation (13) les équations (12), lesquelles résolues suivant $X_1^{(p)}$, $X_2^{(q)}$, etc., donnent les équations (11); d'où l'on déduit facilement les équations (3) et (4). On dérive de même les équations (6) et (7) de l'équation (14) et les constantes de la fonction $\sum a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ sont tellement disposées dans les équations (3, 4), (6, 7), qu'on peut facilement a leur aide retablir la fonction $\sum a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$. Il existe donc $\frac{1.2.3\ldots 2n}{2(1.2.3\ldots n)^2}$ fonctions, d'où dérivent deux systèmes d'équations (3), (6) qui peuvent remplacer l'équation (15); par exemple, on peut prendre

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A'_{\varkappa\lambda} &= \frac{x_\varkappa^{(1)}\, x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)}\, x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots \\ &+ \frac{x_\varkappa^{(n-1)}\, x_\lambda^{(n-1)}}{G_{n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+1)}\, x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} -A'_{\varkappa\lambda} &= \frac{x_\varkappa^{(n)}\, x_\lambda^{(n)}}{G_n} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)}\, x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots \\ &+ \frac{x_\varkappa^{(2n-1)}\, x_\lambda^{(2n-1)}}{G_{2n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(2n)}\, x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}. \end{aligned}\right.$$

4. Si l'on multiplie les équations (15) par la constante $b_{\varkappa,\lambda}$ et donnant à $\varkappa$ et λ les valeurs égales et diverses de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n+1)}{2}$ équations, dont la

somme peut être représentée ainsi :

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(1)}\, x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \dfrac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(2)}\, x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots \\ + \dfrac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(2n)}\, x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0. \end{array} \right.$$

Il est facile de voir qu'on peut déterminer les $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients $b_{\varkappa,\lambda}$ de telle sorte que $2n-1$ de ces $\sum$ s'évanouissent, et alors le $\sum$ restant s'annule de lui-même ; et comme entre les $2n^2$ coefficients x_γ^λ il n'existe que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations, il s'ensuit que

$$2n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{3n^2+3n-2}{2}$$

de ces coefficients peuvent être pris arbitrairement. On a donc ce théorème.

THÉORÈME I. *Soient les* $2n$ *systèmes de valeurs*

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)};\quad x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)};\quad x_1^{(2n)},\ x_2^{(2n)} \ldots x_n^{(2n)}$$

Si ces $2n$ *systèmes satisfont aux* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *équations résultant de l'élimination des* $\frac{n(n+1)}{2}$ *constantes* $a_{\varkappa,\lambda}$ *entre les* $n(n-1)$ *équations* (3) *et* (6) *; si de plus* $2n-1$ *de ces systèmes satisfont respectivement à une équation homogène du second degré entre* n *variables, le système restant y satisfera aussi.*

5. *Applications géométriques.* Soit l'équation du second

degré $n = 3$ entre les deux rapports variables $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$,

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_2x_3 + 2a_{23}x_{33} = 0.$$

Prenons dans le plan de cette conique six points

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)};\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)} \ldots x_1^{(6)},\ x_2^{(6)},\ x_3^{(6)}.$$

Supposons que les équations (3) sont satisfaites par les coordonnées des trois premiers points et les équations (6) par les coordonnées des trois derniers points. Alors dans le triangle formé par les trois premiers points chaque sommet est le pôle du côté opposé, autrement les trois points sont polairement conjugués ; il en est de même des trois autres points. Or, par cinq de ces points, on peut faire passer une conique, c'est-à-dire que les coordonnées de ces points satisfont à une certaine fonction homogène du second degré ; donc d'après le théorème I, les coordonnées du sixième point y satisfont aussi. On a donc ce théorème de Géométrie :

Théorème II. *Étant donnés une courbe du second degré et deux systèmes de trois points chacun conjugués relativement à cette courbe, les six points se trouvent sur une autre courbe du second degré.*

Observation. Si l'on convient de donner à ce triangle le nom de *triangle polaire*, le théorème s'énonce ainsi : *les six sommets de deux triangles polaires relatifs à une même conique sont sur une seconde conique* (*).

Ce théorème est dû à M. Chasles.

Théorème III. *Six points étant situés sur la même conique, si l'on partage ces points d'une manière quelconque en deux systèmes de trois points, les deux sys-*

(*) Cette observation n'est pas de M. Hesse.

tèmes sont des triangles polaires relativement à une certaine courbe du second degré.

Le partage peut se faire de dix manières.

Étant données cinq paires de points conjuguées à la même conique, celle-ci est donnée.

Théorème IV. *Les six côtés de deux triangles polaires touchent une ligne du second ordre.*

Théorème. V. *Les six côtés de deux triangles circonscrits à la même conique sont deux systèmes de triangles polaires relativement à une autre conique.*

Étant données cinq paires de droites *conjuguées*, la conique est déterminée.

Théorème VI. *Deux triangles étant inscrits dans une conique, ils sont circonscriptibles à une autre conique, et* vice versâ; *deux triangles étant circonscrits à une conique, sont inscriptibles dans une autre conique.*

Ces divers théorèmes se démontrent à l'aide des polaires réciproques.

6. Soit

$$\sum a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0$$

l'équation d'une surface du second degré; alors $n = 4$. Les coordonnées des deux points p, q sont désignées par

$$\frac{x_1^{(p)}}{x_4^{(p)}},\quad \frac{x_2^{(p)}}{x_4^{(p)}},\quad \frac{x_3^{(p)}}{x_4^{(p)}}:\quad \frac{x_1^{(q)}}{x_4^{(q)}},\quad \frac{x_2^{(q)}}{x_4^{(q)}},\quad \frac{x_3^{(q)}}{x_4^{(q)}};$$

mettant pour p, q les valeurs diverses de la suite 1, 2, 3, 4, les six équations (3) expriment que le plan polaire de chacun de ces points passe par les trois autres, de sorte que les quatre points sont polairement conjugués par rapport à la surface et sont les sommets d'un *tétraèdre polaire* (*). De même les six équations (6) expriment que les points

(*) Cette dénomination n'est pas de M. Hesse.

5, 6, 7, 8 sont les quatre sommets d'un second tétraèdre polaire. Appliquant le théorème I, on obtient : .

Théorème VII. *Toute surface du second degré qui passe par sept sommets de deux tétraèdres polaires passe aussi par le huitième sommet.*

Par sept points, on peut mener une infinité de surfaces du second degré, n'ayant pas la même courbe d'intersection, de sorte que le théorème précédent peut aussi s'énoncer ainsi. Les huit sommets de deux tétraèdres polaires peuvent être considérés comme les huit points d'intersection de trois autres surfaces du second degré n'ayant pas les mêmes courbes d'intersection.

Nous donnons plus loin le moyen de construire ce huitième point géométriquement.

L'élimination des coefficients $a_{\varkappa,\lambda}$ des équations (3) et (6) donne trois équations de conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des huit points 1, 2,.... 8 pour être les sommets de deux tétraèdres polaires (n° 2). Ainsi, prenant arbitrairement sept de ces points le huitième est déterminé. Or les douze équations (3), (6) renferment neuf équations où manquent les coordonnées du huitième point et trois équations linéaires relatives aux coordonnées du huitième point; ainsi les neuf équations suffisent pour déterminer les coefficients $a_{\lambda,\varkappa}$; et les trois autres équations donnent linéairement les coordonnées du huitième point. Donc si dans deux tétraèdres polaires sept sommets sont donnés, les coefficients $a_{\varkappa,\lambda}$ sont donnés et la surface est déterminée ainsi que les coordonnées du huitième point. On a donc ce théorème connu :

Théorème VIII. *Toute surface du second degré qui passe par sept points pris arbitrairement passe également par un huitième point déterminé.* (Voir Crelle, tome III, pages 199, 100 et 205.)

Théorème IX. *Trois surfaces du second degré* *n'ayant pas la même courbe d'intersection se rencontrent en huit points qui peuvent être considérés comme les huit sommets de deux tétraèdres polaires relativement à une autre surface du second degré.*

Ces huit points fournissent trente-cinq systèmes de deux tétraèdres polaires.

THÉORÈME X. *Toute surface du second degré qui touche sept faces de deux tétraèdres polaires touche aussi la huitième face.*

THÉORÈME XI. *Toute surface du second ordre qui touche sept plans touche aussi un huitième plan déterminé.*

THÉORÈME XII. *Huit plans tangents communs à trois surfaces du second ordre n'ayant que ces huit plans tangents en commun peuvent être considérés comme les huit faces de deux tétraèdres polaires relativement à une surface du second ordre.*

THÉORÈME XIII. *Deux tétraèdres étant inscrits dans trois surfaces du second ordre, n'ayant pas une même courbe d'intersection, sont circonscriptibles à trois autres surfaces du second degré n'ayant pas plus de huit plans tangents en commun.*

Solutions géométriques de quelques problèmes mentionnés ci-dessus.

7. *Lemme.* Étant données une conique et une droite dans le plan de la conique, on peut projeter la figure de manière que la droite aille à l'infini et que la conique devienne un cercle. (PONCELET, *Propriétés projectives*, page 54.)

8. *Lemme.* Si dans un quadrilatère complet dont les trois diagonales sont aa', bb', cc', les points aa' et bb' sont deux paires de points conjugués relativement à une conique, les points cc' sont aussi conjugués relativement à cette conique.

Démonstration.

A, A' points d'intersection de la diagonale	aa'	avec la conique.
B, B'	—	bb'	—
C, C'	—	cc'	—

Par hypothèse les quatre points $a'\,A\,a\,A'$ sont harmoniques et de même les quatre points $b'\,B\,b\,B'$; il faut démontrer que les quatre points $c'\,C\,c\,C'$ sont aussi harmoniques. Projetons la figure de manière que la droite $a'\,b'\,c'$ aille à l'infini et que la conique devienne un cercle (n° 7, lemme) ; dans la figure projetée le point a' étant à l'infini, le point a sera au milieu de AA' et de même le point b au milieu de BB' ; il faut prouver que c est aussi au milieu de CC' ; or la perpendiculaire élevée en a sur la corde AA' passe par le centre du cercle et est perpendiculaire sur bc parallèle à AA' ; la perpendiculaire élevée en b sur la corde BB' passe aussi par le centre et est perpendiculaire à ac parallèle à BB' ; la perpendiculaire élevée en c sur CC' est perpendiculaire sur ab parallèle à CC' ; donc les trois perpendiculaires passent par le centre du cercle ; donc c est le milieu de la corde C. C. Q. F. D.

9. Ce lemme, l'hexagramme de Pascal, et les théorèmes (II), (III) ci-dessus sont des propositions liées entre elles ; de sorte que deux d'entre elles étant données, on peut en conclure facilement les autres. Par exemple, soient abc, $a'\,b'\,c'$ deux triangles polaires relativement à la même conique et p' l'intersection des côtés ac et $b'\,c'$; p l'intersection de bc et $a'\,c'$, p' et b sont des points conjugués, car ac polaire de b passe par p' et $a'\,b$ polaire de p' passe par b ; on prouve de même que p et b sont conjugués. Donc, en vertu du lemme (n° 8), le point P intersection de bp et de $b'\,p'$ et le point P′ intersection de bb' et pp' sont conjugués ; donc la polaire de P passe par P′. Mais la polaire de P est aa' ; donc les trois droites aa', bb', pp' passent

par le même point P′. Ainsi les côtés opposés de l'hexagone $aa' c' b' bc$ se rencontrent en trois points en ligne droite, savoir aa' et bb' (le point P′), bc et $a' c'$ (le point p), ac et $b' c'$ (le point p') ; donc l'hexagone est inscriptible dans une conique (théorème VI).

10. *Problème*. Étant donnés le triangle polaire abc et le couple de points conjugués a'' A, b'' B, construire les polaires de a'' et de b''.

Solution. Écrivons

$$\left.\begin{matrix} aa'' \\ bb'' \end{matrix}\right| p; \quad \left.\begin{matrix} p\mathrm{A} \\ bc \end{matrix}\right| \alpha; \quad \left.\begin{matrix} p\mathrm{B} \\ ac \end{matrix}\right| \beta; \quad \left.\begin{matrix} \beta b'' \\ b\mathrm{B} \end{matrix}\right| \beta';$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha a'' \\ a\mathrm{A} \end{matrix}\right| \alpha'; \quad \left.\begin{matrix} \alpha'\beta' \\ ac \end{matrix}\right| \beta''; \quad \left.\begin{matrix} \alpha'\beta' \\ bc \end{matrix}\right| \alpha'';$$

cela veut dire que p est le point d'intersection des droites $aa''\, bb''$; que α est le point d'intersection des droites pA et bc, et ainsi de suite ; la droite Bβ'' est la polaire du point b'' et la droite Aα'' est la polaire de a''. En effet, la droite $ac\beta$ est la polaire du point b ; donc b et β sont des points conjugués. Dans le quadrilatère $bb''\beta$B, les deux sommets opposés $b\beta$ et b''B sont un couple de points conjugués ; donc en vertu du lemme (n° 8) les points β' et p, extrémités de la troisième diagonale (car l'intersection de bb'' et βB est la même que celle de aa'' et bb''), sont conjugués. On demontre de la même manière, en considérant les lignes $a\alpha$, a''A, $p\alpha'$ comme les trois diagonales d'un quadrilatère complet, que les points p et α' sont conjugués ; ainsi $\alpha'\beta'$ est la polaire du point p', donc bp ou bb'' est la polaire de β'' ; ainsi les polaires de B et de β'' passent par b'', donc Bβ'' est la polaire de b'' ; on prouve de même que Aα'' est la polaire de a''. C. Q. F. D.

11. Soient a, b, c, d et a', b', c', d' les huit sommets de deux tétraèdres polaires et soit $\left.\begin{matrix} dbb' \\ aa' \end{matrix}\right| p$: c'est-à-dire

que p est l'intersection du plan dbb' et de la droite aa'. p étant sur la droite au', le plan polaire de p passe par l'intersection des plans $bcd.b'c'd'$; et étant aussi sur le plan dbb' le plan polaire par le point d'intersection $ac.a'c'd'$; ainsi ce plan polaire passe par les trois points $bcd.b'c'$, $b'c'd'.bc$, $a'c'd'.ac$. Il est facile de trouver encore un quatrième point de ce plan. En effet, menons les droites pa' et pb'. La droite pa' passe par a, et soit $\left.\begin{matrix} pb' \\ db \end{matrix}\right| q$; le plan polaire de q passant par a et le plan polaire de b' passant par a'; en vertu du lemme (n° 8), le plan polaire de p passera par l'intersection des droites qa', ab', c'est-à-dire par l'intersection $dba'.ab'$. Ainsi les quatre points $d'b'c'.bc$, $d'c'a'.ca$, $dbc.b'c'$, $da'b.ab'$ sont dans le même plan. Donc les deux droites $(d'b'c'.bc)$ $(d'c'a'.ca)$ et $(dbc.b'c')$ $(da'b.ab')$ se rencontrent.

Remplaçons les lettres $cab'c'a'bdd'$ respectivement par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, alors les deux droites (734.61) (745.12), (856.23) (861.34) se rencontrent.

Mais les huit sommets des tétraèdres polaires peuvent être divisés de diverses manières en quatre systèmes de points conjugués. Pour trouver les diverses droites qui correspondent à ces systèmes, formons l'hexagone 123456, et désignons-le par H; par le point 7 et un côté du polygone, soit 34, menons un plan qui coupera le côté opposé 61 en un point : c'est le point désigné par 734.61. On aura ainsi un point sur chaque côté de l'hexagone. Désignons par A le second hexagone dont ces points sont les sommets; opérant de même avec le point 8 sur le polygone H, on obtient un troisième hexagone B. Ces trois hexagones jouissent de propriétés remarquables; les trois droites qui joignent les sommets des angles opposés de l'hexagone A passent par le point 7; car les points (734.61) et (761.34) sont des deux sommets opposés dans le polygone A; cette droite étant dans les deux plans 734 et 761 passe par le point 7, etc. On démontre de même que les droites qui joignent les sommets opposés dans le polygone B passent par le point 8.

Désignons par A_1 le côté (734.61) (745.21); dans l'hexagone A nous avons vu que ce côté rencontre le côté (856.23) (861.34), ou B_1 de l'hexagone B; le côté A_1 rencontre encore le côté B_2 (834.61) (845.12) : car les deux côtés sont situés dans le plan 612; de plus le même côté A_1 rencontre le côté B_3 (812.48) (823.56) de l'hexagone B, car si nous remplaçons l'ordre 12345678 par 56123487, A_1 se change en B_3 et B_1 en A_1. Or A_1 et B_1 se coupent : donc le côté A_1 de l'hexagone A rencontre trois côtés B_1, B_2, B_3, et *vice versâ;* par conséquent les douze côtés des deux hexagones sont situés sur le même hyperboloïde. De là :

Théorème XIV. *Si parmi les huit points d'intersection de trois surfaces du second degré (n'ayant pas une courbe commune d'intersection), on en choisit six qui forment les sommets d'un hexagone* H; *et si l'on coupe chaque côté par un plan passant par le côté opposé et le septième point, on obtient ainsi les sommets d'un second hexagone* A; *opérant de même dans l'hexagone* H *avec le huitième point, on obtient les sommets d'un hexagone* B; *les deux hexagones* A *et* B *sont sur le même hyperboloïde.*

12. Deux des trois hexagones étant donnés, on peut construire le troisième.

D'abord connaissant A, B, on trouve H; en effet, en joignant le sommet (745.12) de l'hexagone A avec le sommet (845.12) de l'hexagone B, on obtient le côté 12 de l'hexagone H, et ainsi des autres côtés.

Connaissant les hexagones H, A, on détermine B. En effet, le côté (834.61) (845.12) de l'hexagone B, en joignant les points d'intersection du plan conduit par le point 1 et la droite (734.61) (745.12) avec les côtés (756.23) (761.34) et (712.45) (723.56), et ainsi des autres. On voit donc que, pour construire l'hexagone B, il suffit de connaître seulement les sept points 1234567 des deux hexagones H et A; l'intersection des trois plans qui passent par les côtés opposés de l'hexagone B donne le huitième point 8. Ainsi est résolu le problème mentionné ci-dessus.