NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAC CULLAGH

Surfaces réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 157-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__157_1>

THE TRANSACTIONS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. Volume XVII; Dublin, 1837; in-4. Printed by Dixon Hardy, 3, Cecilia street, printer to the Royal Irish Academy.

GEOMETRICAL PROPOSITIONS APPLIED TO THE WAVE THEORY OF LIGHT; by James Mac Cullagh F. T. C. D. Read june 24, 1833; p. 241.

Surfaces réciproques.

1. THÉORÈME I. *Soient une surface* A, *un point* O *fixe,* Q *un point de la surface* A, P *plan tangent en* Q, OP *perpendiculaire sur* P; *sur* OP *on prend un point* R *tel, que*

$$OP.OR = K^2 = \text{const.},$$

les points R *et* Q *sont dits* réciproques, *et* B, *surface du lieu de* R, *est surface* réciproque *de* A ; *c'est-à-dire si l'on mène un plan tangent à la surface* B *en* R, *et si de* O *on abaisse sur ce plan la perpendiculaire* ON, *elle passe par le point* Q, *et l'on a*

$$\mathrm{ON}.\mathrm{OQ} = \mathrm{K}^2,$$

et le plan tangent en R *coupe* OQ *perpendiculairement. Les rayons* OQ *et* OR *sont réciproques.*

2. *Corollaire.* Si le point Q est un point singulier par lequel on peut mener une infinité de plans tangents, au même point Q correspondent une infinité de points R formant une courbe, et le plan tangent en R à la surface B touche cette surface le long de cette courbe et est perpendiculaire à OQ.

3. Soient abc, $a'b'c'$ deux ellipsoïdes dont les demi-axes a, b, c et a', b', c' coïncident respectivement et ont la relation

$$aa' = bb' = cc' = \mathrm{K}^2.$$

On prend pour le point fixe O le centre commun des deux ellipsoïdes; ces deux ellipsoïdes sont des surfaces réciproques: a grand axe, b moyen, c petit axe; alors a' est petit axe, b' moyen axe et c' grand axe. Les sections circulaires des deux ellipsoïdes passent par le même axe moyen b, b'.

Soient Q et R deux points réciproques des deux ellipsoïdes; OQR un plan passant par OQ, OR; Oqr une perpendiculaire au plan OQR coupant l'ellipsoïde abc en q et l'ellipsoïde $a'b'c'$ en r; les lignes OQ, Oq sont les demi-axes de l'ellipse, intersection de la surface abc par le plan QOq; et de même OR, Or sont les demi-axes des intersections de la surface $a'b'c'$ avec le plan ROr.

Si la droite OQ reste dans le même plan, il en sera de même du rayon réciproque OR. Ces deux plans sont dits *réciproques*.

Si deux rayons réciproques sont dans le même plan principal et, par conséquent, perpendiculaire à un demi-axe de l'ellipsoïde, les plans passant par ce demi-axe et par les rayons réciproques sont évidemment réciproques.

4. Théorème II. *Si, par un point* O *de l'intersection de deux plans donnés, on mène une droite dans chaque plan, et perpendiculaires l'une à l'autre, le plan de ces droites enveloppe un cône dont les sections, par des plans parallèles aux plans donnés, sont des paraboles; la droite perpendiculaire au plan mobile décrit aussi un cône dont les sections parallèles aux plans donnés sont des cercles.*

5. Théorème III. O *le centre d'un ellipsoïde;* OQ *et* Oq *les demi-axes d'une ellipse, section diamétrale; en* O *on élève une perpendiculaire à ce plan diamétral. Sur cette perpendiculaire on prend* OT=OQ, OV=Oq; *on aura une double surface, lieu des points* T *et* V. *Soient* OS *la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* T *à la double surface, et* OP *la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* Q *à l'ellipsoïde, on aura :* 1° OP=OS; 2° *les droites* OP *et* OS *sont à angle droit;* 3° *les quatre droites* OP, OQ, OS, OT *sont dans un même plan perpendiculaire à* Oq.

La double surface est la surface des ondes de Fresnel; on peut la nommer *surface biaxiale,* à raison de sa génération et du rôle qu'elle joue dans la théorie des cristaux à deux axes.

La surface biaxiale d'un ellipsoïde *abc* est désignée sous le nom de la biaxiale *abc*.

6. Théorème IV. *Les surfaces biaxiales de deux ellipsoïdes* réciproques *sont des surfaces réciproques.*

7. Premier cas particulier. *La section* QOq *est un*

cercle dans l'ellipsoïde abc. Alors les points T et V coïncident en un seul point n ; à ce point il y a une infinité de plans tangents, puisqu'il y a une infinité de diamètres conjugués rectangulaires dans le cercle ; n est le point où les deux nappes de ses surfaces biaxiales se coupent : on peut l'appeler *point nodal* ou nœud. OQ décrivant même plan circulaire, le rayon réciproque OR décrit un plan réciproque au cercle (*voir* ci-dessus), et comme Oq est dans le plan du cercle, nous avons trois droites OR, Oq, OS à angles droits, et dont deux, OR, Oq, sont assujettis à rester dans les mêmes plans ; par conséquent OS décrit un cône dont les sections parallèles aux plans donnés sont des cercles. Or TS, maintenant nS, est parallèle au plan fixe qui contient OR ; ainsi le point S décrit un cercle passant par n, c'est-à-dire la polaire du point O sur le cône nodal est un cercle. Par le point nodal menons deux plans respectivement parallèles au cercle QOq et à son plan réciproque ; nommons ces plans, plans tangents principaux, alors chaque plan tangent nodal coupe ces deux plans principaux suivant deux droites qui sont à angles droits.

Par conséquent les sections du cône nodal par des plans parallèles aux plans tangents principaux sont des paraboles.

SECOND CAS PARTICULIER. ROr *est une section circulaire dans l'ellipsoïde* a'b'c' ; OR, Or deux diamètres rectangulaires, et par conséquent

$$OR = b'.$$

Mais

$$OR \, . \, OP = K^2 = bb' ;$$

donc

$$OP = b = OS.$$

(*Voir* ci-dessus.) Ainsi OS est donné de grandeur et de position ; car il est perpendiculaire au plan ROr. Un plan mené par S perpendiculaire à OS est tangent au biaxial *abc* du point T, et ce plan tangent, parallèle à ROr, reste le même, quelle que soit la position du système OR, Or dans son plan circulaire ; mais le point T varie : car le plan ROS, dans lequel se trouve T, change avec OR. Donc le point T décrit une courbe de contact sur le plan tangent, et cette courbe est un cercle passant par S.

En rapportant la même considération au biaxial $a'b'c'$, on trouve l'inverse : le point nodal se change en cercle et le cercle en point nodal.

8. La section faite dans une surface biaxiale par un plan principal de l'ellipsoïde est généralement un cercle et une ellipse. Si la section est faite par le plan *bc*, le cercle est dans l'intérieur de l'ellipse ; si la section est faite par *ab*, le cercle est hors de l'ellipse ; et par le plan *ac*, le cercle coupe l'ellipse.

Surfaces apsidales.

Les surfaces biaxiales sont un cas particulier des surfaces apsidales.

9. G est une surface, O point fixe origine ; par O menons un plan coupant la surface G suivant une courbe, et par ce même point élevons une perpendiculaire au plan coupant ; sur cette perpendiculaire prenons des longueurs *g* à partir de O, égales aux normales menées de O sur la courbe. Le lieu des points ainsi déterminé est une *surface apsidale* dont O est le centre, car les longueurs se portent en deux sens.

Théorème. *Si l'on mène des plans tangents à deux points correspondants* A *et* a *sur la surface* G *et sur la* surface apsidale correspondante, *ces plans tangents sont perpendiculaires l'un sur l'autre et au plan* AOa.

Théorème. *Les surfaces apsidales engendrées par deux surfaces réciproques sont des surfaces réciproques.*

Exemple. Si G est une sphère, la surface apsidale est une surface de révolution.