NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Relations entre les lignes trigonométriques circulaires et les lignes analogues hyperboliques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 151-156

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__151_0>

RELATIONS
Entre les lignes trigonométriques circulaires et les lignes analogues hyperboliques.

1. $y^2 - x^2 = -1$ est l'équation d'une hyperbole équilatère à axes rectangulaires; O le centre; A le sommet; M un point quelconque; $MP = y$, $OAP = x$ coordonnées du point M; R le point où une parallèle à l'axe OA, menée par M, rencontre la tangente en A; S le point où cette même tangente est coupée par le demi-diamètre OM; $OA = 1$. Faisons l'angle $ROA = z$; l'aire du secteur extérieur $MOAM = \frac{1}{2}\omega$, $MOP = \varphi$.

2. La quadrature connue de l'hyperbole donne (*voir* tome V, page 388)

$$e^{\omega} = x + y, \quad e^{-\omega} = x - y;$$

d'où

$$x = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad y = \frac{e^{\omega} - e^{\omega}}{2},$$

x et y sont des transcendantes auxquelles on a respectivement donné les noms de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique* de la variable ω et que l'on désigne ainsi,

$$x = \cos h.\omega, \quad y = \sin h.\omega.$$

Gudermann, comme nous avons vu, désigne ces lignes par les lettres de l'alphabet gothique; on a évidemment

$$\sin h.\omega = \operatorname{tang} z, \quad \cos h.\omega = \operatorname{séc} z,$$

$$\operatorname{tang} a.\omega = \sin z, \quad \sin z = \operatorname{tang} \varphi.$$

D'après ces relations,

$$\omega = \log(\operatorname{tang} z + \operatorname{séc} z) = \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}z\right);$$

ainsi faisant croître z de 0 à 45 degrés, on pourra, au moyen des Tables des lignes trigonométriques circulaires, construire des Tables des lignes hyperboliques dites *trigonométriques* et des secteurs ω correspondants. Quoique, en toute rigueur, on puisse se passer de ces dernières lignes, il y a des cas où il est utile d'avoir ces Tables calculées d'avance. En effet, lorsque, dans la solution d'un problème, on a supposé qu'une certaine quantité était égale au cosinus d'un arc dès que cette quantité n'est plus renfermée entre les limites $+1$ et -1, les limites comprises, la solution devient impossible; mais on peut alors égaler la quantité à un cosinus hyperbolique qui prend toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, excepté celles qui sont renfermées entre $+1$ et -1.

Exemple. Soit l'équation

$$x^3 - ax - b = 0;$$

faisant

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}a}, \quad \cos 3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

on a

$$x = r\cos\omega:$$

solution impossible lorsque $\frac{4b}{r^3} > 1$. Dans ce cas, on fait

$$\cos h.3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

et alors

$$x = r\cos h.\omega.$$

Supposons

$$a = 3, \quad b = 4;$$

alors

$$r = 2, \quad \frac{4b}{r^3} = 2 = \cos h.3\omega.$$

Consultant les Tables, on trouve qu'à ce cosinus correspond le secteur

$$3\omega = 0,5719475,$$

d'où secteur

$$\omega = 0,1906492;$$

et à ce dernier secteur correspond

$$\cos h.\omega = 1,0979133.$$

Donc

$$x = r \cos h.\omega = 2,1958266.$$

3. Nous avons pris cet exemple dans l'ouvrage de Lambert (J.-H.), intitulé : *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen tabellen, etc.* Additions aux Tables logarithmiques et trigonométriques pour faciliter et abréger les calculs qui se présentent dans les applications des mathématiques. Berlin, 1770; in-8 de 210 pages. (*Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*; t. Ier, p. 28.)

La 32e Table (page 178) est consacrée aux fonctions hyperboliques, et chaque double page est divisée en neuf colonnes.

Colonnes.		
1re	Valeurs de z (angle transcendant de Lambert) croissant par degré de zéro à 90 degrés,	
2e	Valeurs correspondantes du secteur $\frac{1}{2}\omega$,	
3e	—	des sinus hyperboliques,
4e	—	des cosinus hyperboliques,
5e	—	log sinus hyperboliques,
6e	—	log cosinus hyperboliques,
7e	—	tang φ,
8e	—	log tang φ,
9e	—	φ évaluée jusqu'à la tierce,

le tout avec 7 décimales.

Les Tables bien plus étendues de Gudermann ont été éditées en Allemagne. Celles de M. Yvon Villarceau, encore meilleures, ne trouvent point d'éditeur en France (*voir* tome XI, page 412).

4. Les noms de sinus, cosinus, etc., donnés à ces fonctions hyperboliques sont justifiés par les relations suivantes, Table 38ᵉ de Lambert (page 136) :

$$\sin h\,(y+z) = \sin hy \cos hz + \cos hy \sin hz,$$
$$\sin h\,(y-z) = \sin hy \cos hz - \cos hy \sin hz,$$
$$\cos h\,(y+z) = \cos hy \cos hz + \sin hy \sin hz,$$
$$\cos h\,(y-z) = \cos hy \cos hz - \sin hy \sin hz.$$

En effet, pour vérifier ces formules, il suffit de remplacer les sinus et cosinus par leurs évaluations exponentielles. Une manière plus simple est de remplacer y et z par

$$iy \text{ et } iz \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$
$$\sin hiy = i \sin y.$$
$$\cos hiy = \cos y,$$
$$\sin hiz = i \sin z,$$
$$\cos hiz = \cos z;$$

d'où

$$\sin hiy \cos hiz + \sin hiz \cos hiy = i \sin(y+z) = \sin h\,(iz+iy).$$

Faisons y égal à $-iy$ et z égal à $-iz$, on trouve la première formule.

Ces formules servent à la multiplication et à la multisection de ces transcendantes

5. Nous voyons encore ici l'immense puissance qu'exerce sur nous l'habitude, même en mathématiques. Accoutumés que nous sommes à manier les Tables des logarithmes et des sinus, ces transcendantes nous semblent aussi simples que des quantités algébriques ordinaires, et dès qu'une question est ramenée à ces transcendantes, nous la considérons comme étant résolue, tandis que

d'autres transcendantes, telles que celles dont nous venons de parler, les transcendantes elliptiques, les *gamma*, etc., pour lesquelles les Tables n'existent pas ou sont peu connues, nous apparaissent sous un aspect effrayant, comme quelque chose d'éminemment difficile, et ces quantités très-utiles dans les applications sont repoussées de l'enseignement. A ce propos, nous jugeons opportun de traduire ici *en entier* le § 55 (page 48) de l'ouvrage cité de Lambert.

« Avant les temps de Neper, ceux qui faisaient de » l'arithmétique leur étude favorite trouvaient un passe- » temps agréable dans la comparaison des progressions » arithmétiques et géométriques, et fournissaient ainsi » à ceux qui aiment mieux injurier les mathématiques » que de les apprendre, un motif désiré de compter ces » *comparaisons* au nombre des plus *inutiles spéculations*. » Car alors aussi le *virtus post nummos*, s'opposait aux » progrès de la science. Toutefois Neper n'y fit pas at- » tention. Il compara les deux progressions pour voir si, » parmi les propriétés remarquables de cette théorie, on » n'en trouverait pas plusieurs autres. Les propriétés re- » marquables sont rarement isolées. C'est ainsi que » Neper parvint à en tirer les *logarithmes*, et par là la » chose cessa d'être une pure *spéculation*. »

Si Neper n'avait pas fait son invention, le calcul intégral n'en aurait pas moins mené à la transcendante $\int \frac{dx}{x}$, à laquelle on n'aurait certainement pas donné le nom de *logarithme*, et il se serait écoulé peut-être un temps très-long, avant de faire l'observation simple que $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{d\,(xy)}{xy}$ est une propriété fondamentale pour faciliter les calculs arithmétiques; c'est alors seulement qu'on se serait mis à construire des Tables pour cette transcendante. Nous devons à Neper d'avoir cette construction probablement un siècle plus tôt. Ceux qui préconisent tant les logarithmes, ne savent pas qu'ils doivent cet admirable instrument à un arithmologue, à un homme aux spéculations abstraites et qui a même débuté par un écrit sur la théologie. Il en est de même partout. Que saurions-nous dans la mécanique pratique sans les méditations théoriques des Archimède, des Kepler, des Descartes, des Newton, des Leibnitz et autres illustres *rêveurs*, que saurions-nous? Rien, rien, rien. Sans les travaux de ces hommes illustres nous n'existerions pas.