NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABADIE

Solution de la question 296

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 142-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__142_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 296

(voir p. 50);

PAR M. ABADIE,
Capitaine d'artillerie.

La question peut s'énoncer ainsi : Étant donnés deux systèmes chacun de sept points dans un même plan, trouver deux nouveaux points P et P' tels, que si l'on joint le point P aux points du premier système et le point P' aux points correspondants du second système, les faisceaux résultants soient homographiques. Le caractère de deux droites correspondantes dans deux faisceaux homographiques étant qu'à l'une d'elles dans le premier faisceau n'en correspond qu'une seule dans le second, il s'ensuit que m et m' étant les coefficients angulaires de ces deux droites, on aura la relation

$$(1) \qquad Amm' + Bm + Cm' + D = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes inconnues, les mêmes pour deux droites correspondantes quelconques. Comme de plus, si l'on désigne par x, y et x', y' les coordonnées des points P et P', et par a_n, b_n et a'_n, b'_n les coordonnées de deux points quelconques donnés correspondants dans les deux systèmes, on aura

$$m = \frac{y - b_n}{x - a_n}, \quad m' = \frac{y' - b'_n}{x' - a'_n},$$

l'équation se changera en

$$(2) \quad \begin{cases} (y - b_n)[A(y' - b'_n) + B(x' - a'_n)] \\ + (x - a_n)[C(y' - b'_n) + D(x' - a'_n)] = 0; \end{cases}$$

en faisant successivement

$$n = 1, 2, 3 \ldots 7,$$

on aura les sept équations entre les sept inconnues x, y, x', y', $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$.

Des six premières équations éliminons les cinq dernières inconnues; à cet effet, multiplions les six premières équations par les six coefficients indéterminés λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 et en posant

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (y - b_1) + \lambda_2 (y - b_2) + \ldots + \lambda_6 (y - b_6) &= 0, \\
\lambda_1 (x - a_1) + \lambda_2 (x - a_2) + \ldots + \lambda_6 (x - b_6) &= 0, \\
\lambda_1 b'_1 (y - b_1) + \lambda_2 b'_2 (y - b_2) + \ldots + \lambda_6 b'_6 (y - b_6) &= 0, \\
\lambda_1 a'_1 (y - b_1) + \lambda_2 a'_2 (y - b_2) + \ldots + \lambda_6 a'_6 (y - b_6) &= 0, \\
\lambda_1 b'_1 (x - a_1) + \lambda_2 b'_2 (x - a_2) + \ldots + \lambda_6 b'_6 (x - b_6) &= 0, \\
\lambda_1 a'_1 (x - a_1) + \lambda_2 a'_2 (x - a_2) + \ldots + \lambda_6 a'_6 (x - b_6) &= 0,
\end{aligned}$$

on aura pour l'équation cherchée entre x et y,

$$(3)\ 0 = \text{déter.} \begin{cases} (y-b_1), & (y-b_2), & (y-b_3), & (y-b_4), & (y-b_5), & (y-b_6), \\ b'_1(y-b_1), & b'_2(y-b_2), & b'_3(y-b_3), & b'_4(y-b_4), & b'_5(y-b_5), & b'_6(y-b_6), \\ a'_1(y-b_1), & a'_2(y-b_2), & a'_3(y-b_3), & a'_4(y-b_4), & a'_5(y-b_5), & a'_6(y-b_6), \\ (x-a_1), & (x-a_2), & (x-a_3), & (x-a_4), & (x-a_5), & (x-a_6), \\ b'_1(x-a_1), & b'_2(x-a_2), & b'_3(x-a_3), & b'_4(x-a_4), & b'_5(x-a_5), & b'_6(x-a_6), \\ a'_1(x-a_1), & a'_2(x-a_2), & a'_3(x-a_3), & a'_4(x-a_4), & a'_5(x-a_5), & a'_6(x-a_6); \end{cases}$$

équation du sixième degré, mais dans laquelle x et y ne dépassent pas le troisième degré.

Si l'on examine l'équation (3) avec attention et qu'on se rappelle qu'un déterminant est nul quand deux lignes horizontales sont les mêmes, on verra facilement que les coefficients des termes du sixième, cinquième et quatrième degré sont nuls ; de sorte que l'équation n'est plus que du troisième degré.

Si dans le déterminant on pose

$$x = a_n, \quad y = b_n,$$

n étant un quelconque des six premiers nombres, ce déterminant devient identiquement nul ; ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'équation (2) : il s'ensuit que la courbe passe par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 du premier système P.

Si dans l'équation de la courbe, on échange respectivement a_6, b_6, a'_6, b'_6 en a_7, b_7, a'_7, b'_7, on aura une seconde courbe du troisième degré passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, P.

Éliminant y entre ces deux équations, on obtiendra une équation en x du neuvième degré ; mais comme les deux courbes ont en commun les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, l'équation en x sera divisible par $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, $(x-a_4)$, $(x-a_5)$ et pourra être réduite à une équation du quatrième degré. Connaissant les valeurs de x, on sait par la méthode d'Abel, soit plus facilement par celle de M. Richelot, ou même par le procédé de M. Sylvester, en tirer linéairement les valeurs correspondantes de y.

Quant à la réduction de l'équation en x au troisième degré, je n'ai jusqu'ici trouvé rien de satisfaisant (*).