NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes d'Eisenstein

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 133-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__133_1>

THÉORÈMES D'EISENSTEIN.

(Crelle, tome XLIV, page 261; 1852.)

1. *Lemme.* Soit

$$S = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \ldots, \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1}, \ldots, \end{vmatrix}$$

les barres désignent un *déterminant* entre $(n+1)$ quantités, et l'on suppose que S n'est pas nul.

Soit un système d'équations

$$\begin{aligned} a_1 u_1 &+ b_1 u_2 + c_1 u_3 + \ldots = \gamma_1, \\ a_2 u_1 &+ b_2 u_2 + c_2 u_3 + \ldots = \gamma_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1} u_1 &+ b_{n+1} u_2 + c_{n+1} u_3 + \ldots = \gamma_{n+1}, \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 + \ldots, \\ u_2 &= \beta_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Soit

$$S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \ldots, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \ldots, \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, \ldots, \end{vmatrix}$$

on a

$$S_1 S = 1,$$

et

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots = 1, \\ b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + \ldots = 1, \\ c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + \ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots = 0, \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + \ldots = 0, \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ou bien symboliquement

$$\sum a\alpha = 1, \quad \sum a\beta = 0,$$

c'est-à-dire lorsque les lettres latines sont jointes aux lettres grecques correspondantes, la somme est égale à 1, et si les lettres ne sont pas correspondantes, la somme est nulle.

2. Théorème. *Soit*

$$p_\mu = a_\mu + A_1 b_\mu x + A_2 c_\mu x^2 + A_3 d_\mu x^3 + \ldots,$$
$$\omega_\mu = \alpha_\mu + A_1 \beta_\mu \xi + A_2 \gamma_\mu \xi^2 + A_3 \delta_\mu \xi^3 + \ldots;$$

si l'on donne à μ *les valeurs successives de la suite* 1, 2, 3,..., n + 1, *les* a, b, c,..., α, β, γ *ayant même signification que ci-dessus, et les* A *étant des quantités quelconques, on a*

$$\sum p\mu = p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots p_{n+1}\mu_{n+1} = \text{fonction de } x\xi.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du système d'équations (1).

Corollaire. Si A_μ^2 est le coefficient binominal de z^μ dans $(1+z)^n$, on a

$$\sum p\mu = (1 + x\xi)^n.$$

Ainsi le produit de $n+1$ fonctions, chacune de degré n, se réduit ici à une fonction de degré $2n$ et de degré n par rapport à chaque variable.

Application. Si l'on a $n = 2$,

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 = (1 + x\xi)^2;$$

posant

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0,$$

alors

$$p_3\omega_3 = (1 + x\xi)^2.$$

x et ξ ne sont plus des variables *indépendantes*, et l'on a

$$p_2 = \frac{-\omega_1 p_1}{\omega_2},$$

$$p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1 p_3 \omega_3}{\omega_2\omega_3},$$

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1^2 p_3 \omega_3}{\omega_2\omega_3} = \frac{-\omega_1\omega_2\omega_3 p_1^2 (1 + x\xi)^2}{\omega_2^2\omega_3^2};$$

d'où

$$\sqrt{p_1 p_2 p_3} = \sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}\,.\,\frac{p_1(1 + x\xi)}{\omega_2\omega_3}.$$

De là ce théorème :

La racine carrée d'une fonction rationnelle en x *du sixième degré peut être transformée rationnellement dans la racine carrée d'une fonction similaire d'une autre variable.*

Eisenstein applique ce théorème à la transformation des intégrales abéliennes de première classe; travail qui vient d'être considérablement perfectionné et étendu par

M. Hermite dans une suite de Mémoires insérés dans les *Comptes rendus*, et qui renferment de précieuses et profondes recherches sur les déterminants, dont nous espérons pouvoir entretenir nos lecteurs. (*Comptes rendus*, 1855, 1^er semestre, pages 246, 304, 365, 427, 485 et 536.)

Voici la marche d'Eisenstein :

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = F(x,\xi) = (1 + x\xi)^2 - p_3\omega_3 = \theta^2 - p_3\omega_3,$$
$$\theta = 1 + x\xi;$$
$$d_\xi F = 2\theta\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - p_3\frac{d\omega}{d\xi} = 2\theta\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - \frac{\theta^2}{\omega_3}\frac{d\omega}{d\xi},$$
$$d_\xi F = \frac{\theta}{\omega_3}\left[2\omega_3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - \theta\frac{d\omega_3}{d\xi}\right] = -\frac{\theta}{\omega_3}\Theta;$$
$$\Theta = -2\omega_3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta\frac{d\omega_3}{d\xi},$$

or

$$dx = \frac{-d_\xi F \,.\, d\xi}{d_x F} = \frac{\theta\Theta}{\omega_3 d_x F} d\xi;$$

mais

$$\sqrt{p_1 p_2 p_3} = \sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}\,\frac{p_1\theta}{\omega_2\omega_3}:$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\frac{\Theta\omega_2}{d_x F . p_1}.$$

Faisons

$$p_1 = (x - r)(x - s),$$

r et s sont des quantités connues ; il vient

$$\frac{(x - s)\,dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\omega_2 . \frac{\Theta}{d_x F . (x - s)}.$$

Entre x et ξ existe la relation quadratique

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0, \quad \text{ou} \quad F(x,\xi) = 0.$$

Ainsi x est une fonction de ξ, et x a deux valeurs en ξ. Mettant successivement ces deux valeurs et sommant, on a

$$\sum \frac{(x-s)\,dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\omega_2 \sum \frac{\Theta}{d_x \mathrm{F}(x-s)}.$$

Mais Θ est du premier degré en x, et F est du second degré; on a donc, d'après la théorie de la décomposition en fractions partielles,

$$\sum \frac{\Theta}{d_x \mathrm{F}(x-r)} = \frac{\Theta(r,\xi)}{\mathrm{F}(r,\xi)}.$$

Dans Θ et F on a remplacé x par r; mais

$$\mathrm{F}(r,\xi) = \omega_2 p_2(r),$$

où $p_2(r)$ est la valeur de p_2 dans laquelle x est remplacé par r; par conséquent $p_2(r)$ est une constante. On a donc

$$\sum \frac{(x-s)\,dx}{\sqrt{p_1\,p_2\,p_3}} = \frac{\Theta(r,\xi)\,d\xi}{p_2(r)\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}},$$

et de même

$$\sum \frac{(x-r)\,dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{\Theta(r,\xi)\,d\xi}{p_2(s)\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}};$$

mais

$$\theta(x,\xi) = \beta_3\sqrt{2}\,(1 - x\xi) + 2\gamma_3\xi - 2\alpha_3 x.$$

Ainsi $\theta(r,\xi)$ est du premier degré en ξ, donc les membres à droite de ces équations sont des différentielles d'intégrales abéliennes.