NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAQUE

DEVYLDER

Solution de la question 292

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 132-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__132_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 292

[voir tome XIII, page 192 (*)];

PAR M. PAQUE, Professeur à Liége,

ET

M. DEVYLDER, Professeur à Namur.

Question. n étant un nombre positif entier, prouver que l'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2\,3\ldots n}.$$

Démonstration. On a

$$(1)\qquad e^n = 1 + n + \frac{n^2}{[2]} + \frac{n^3}{[3]} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{[n-1]} + \frac{n^n e^{\theta n}}{[n]};$$

θ est compris entre o et 1.

Écrivons la série

$$\frac{1}{[n]},\ \frac{1}{[n-1]},\ \frac{1}{[n-2]},\ \frac{1}{[n-3]},\ldots,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{e^{\theta n}},$$

tous les termes sont moindres que l'unité, à l'exception d'un seul terme égal à l'unité. Multipliant les termes du second membre de l'équation (1), respectivement par les termes de la dernière série et mettant $\frac{1}{[n]}$ en facteur commun, on obtient

$$e^n > \frac{1}{[n]}\left[\begin{array}{l} 1 + n.n + \dfrac{n.n-1}{2}n^2 \\ + \dfrac{n.n-1.n-2}{1.2.3}n^3 + \ldots + n.n^{n-1} + n^n \end{array}\right],$$

ou bien

$$e^n > \frac{(1+n)^n}{[n]}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*) J'ai réuni ces deux solutions qui ne diffèrent pas essentiellement.

Note. M. Cauchy dans ses *Exercices d'Analyse*, tome IV, page 106, démontre l'inégalité

$$n^{\frac{n}{2}} < [n] < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n;$$

d'après ce qui précède, on peut remplacer la limite supérieure par $\left(\frac{1+n}{e}\right)^n$.

Stirling donne la formule

$$e^n > \frac{n^n \sqrt{2n\pi}}{[n]} \text{ (A. Genocchi).}$$