

PAQUE

DEVYLLDER

Solution de la question 292

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 132-133

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__132_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 292

[voir tome XIII, page 192 (*)];

PAR M. PAQUE, Professeur à Liège,

ET

M. DEVYLDER, Professeur à Namur.

Question. n étant un nombre positif entier, prouver que l'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Démonstration. On a

$$(1) \quad e^n = 1 + n + \frac{n^2}{[2]} + \frac{n^3}{[3]} + \dots + \frac{n^{n-1}}{[n-1]} + \frac{n^n e^{\theta n}}{[n]};$$

θ est compris entre 0 et 1.

Écrivons la série

$$\frac{1}{[n]}, \quad \frac{1}{[n-1]}, \quad \frac{1}{[n-2]}, \quad \frac{1}{[n-3]}, \dots, \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{e^{\theta n}},$$

tous les termes sont moindres que l'unité, à l'exception d'un seul terme égal à l'unité. Multipliant les termes du second membre de l'équation (1), respectivement par les termes de la dernière série et mettant $\frac{1}{[n]}$ en facteur commun, on obtient

$$e^n > \frac{1}{[n]} \left[\begin{array}{l} 1 + n \cdot n + \frac{n \cdot n - 1}{2} n^2 \\ + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \dots + n \cdot n^{n-1} + n^n \end{array} \right],$$

ou bien

$$e^n > \frac{(1+n)^n}{[n]} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*) J'ai réuni ces deux solutions qui ne diffèrent pas essentiellement.

Note. M. Cauchy dans ses *Exercices d'Analyse*, tome IV, page 106, démontre l'inégalité

$$n^{\frac{n}{2}} < [n] < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n ;$$

d'après ce qui précède, on peut remplacer la limite supérieure par $\left(\frac{1+n}{e}\right)^n$.

Stirling donne la formule

$$e^n > \frac{n^n \sqrt{2n\pi}}{[n]} \text{ (A. Genocchi).}$$
