NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OTTO HESSE

Interprétation géométrique d'une relation linéaire entre les coefficients de l'équation du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 122-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__122_1>

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

D'une relation linéaire entre les coefficients de l'équation du second degré ;

D'APRÈS M. OTTO HESSE,
Professeur à l'Université de Kœnigsberg.

(CRELLE, t. XLV, p. 82 ; 1852.)

1. *Notation.* v est une fonction *algébrique entière, homogène, du second degré* de n variables $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$; v_k est un coefficient différentiel de v pris par rapport à la variable x_k : ces coefficients au nombre de n sont des fonctions homogènes du premier degré des n variables ; $v_{k\lambda}$ est un coefficient différentiel de v_k pris par rapport à la variable x_λ : il y a n^2 de ces coefficients différentiels du second ordre, qui sont des quantités constantes, et l'on a

$$v_{k\lambda} = v_{\lambda k},$$

à cause de l'homogénéité.

2. Cette homogénéité donne l'identité connue

$$v_k = v_{1k}x_1 + v_{2k}x_2 + \ldots\; v_{nk}x_n,$$

ce qui équivaut aux n identités

$$(1)\quad \begin{cases} v_1 = v_{11}x_1 + v_{21}x_2 + \ldots\; v_{n1}x_n, \\ v_2 = v_{12}x_1 + v_{22}x_2 + \ldots\; v_{n2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = v_{1n}x_1 + v_{2n}x_2 + \ldots\; v_{nn}x_n, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta.x_1 = V_{11}v_1 + V_{21}v_2 + \ldots\; V_{n1}v_n, \\ \Delta.x_2 = V_{12}v_1 + V_{22}v_2 + \ldots\; V_{n2}v_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta.x_n = V_{1n}v_1 + V_{2n}v_2 + \ldots\; V_{nn}v_n, \end{cases}$$

Δ est le déterminant formé avec les n^2 coefficients

$$v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{nn};$$

et, par conséquent, Δ est une constante ne renfermant que les coefficients de la fonction v; V_{rs} est la dérivée de Δ prise par rapport à v_{rs}; et l'on a

$$V_{rs} = V_{sr}, \quad \text{car} \quad v_{rs} = v_{sr}.$$

Multipliant la première des équations (1) par Δ et remplaçant $\Delta . x_1$, $\Delta . x_2$, etc., par leurs valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta . v_1 = {} & v_1 [v_{11} V_{11} + v_{21} V_{21} + \ldots \; v_{n1} V_{n1}], \\ & v_2 [v_{11} V_{12} + v_{21} V_{22} + \ldots \; v_{n1} V_{n2}], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & v_n [v_{11} V_{1n} + v_{21} V_{2n} + \ldots \; v_{n1} V_{nn}], \end{aligned}$$

ce qui multiplie v_1 dans le second membre, est égal à Δ: les multiplications de $v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont donc nulles. On trouve des résultats analogues, en multipliant les autres équations du système (1) par Δ; on a donc en général

$$(3) \qquad 0 = v_{1k} V_{1\lambda} + v_{2k} V_{2\lambda} + \ldots + v_{nk} V_{n\lambda},$$

$$(4) \qquad \Delta = v_{1k} V_{1k} + v_{2k} V_{2k} + \ldots \; v_{nk} V_{nk},$$

k et λ étant deux nombres de la suite 1, 2, 3,..., n.

3. On a

$$v_k x_\lambda = v_{1k} x_1 x_\lambda + v_{2k} x_2 x_\lambda + \ldots \; v_{nk} x_n x_\lambda.$$

Si l'on remplace les produits $x_1 x_\lambda$, $x_2 x_\lambda$, etc., par $V_{1\lambda}$, $V_{2\lambda}$, etc., l'expression $v_k x_\lambda$ s'annule, tandis que l'expression $v_k x_k$ prend la valeur de Δ.

Soit w une autre fonction algébrique *entière homogène* du second degré des mêmes variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; l'expression du second degré $v_k w_\lambda - v_\lambda w_k$ s'annule lorsqu'on y met $V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{22}, \ldots$ à la place des produits $x_1 x_1$, $x_1 x_2, \ldots, x_2 x_2, \ldots$: c'est une conséquence du § 3.

5. *Lemme*. $v = 0$ étant l'équation d'une conique, les coordonnées $\frac{x_1}{x}$, $\frac{x_2}{x}$, du centre sont données par les deux

équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0;$$

si le centre est sur la courbe, la conique se réduit à deux droites. Outre ces deux équations, on a

$$v = 0:$$

or

$$2v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3;$$

donc

$$v_3 = 0.$$

Ainsi si l'on élimine x_1, x_2, x_3 entre les trois équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

l'équation finale donne la relation entre les coefficients de l'équation qui exprime que l'équation $v = 0$ se décompose en deux facteurs linéaires : cette relation est $L = 0$, où L est le déterminant des coefficients de l'équation.

6. Soient $v = 0$, $w = 0$ les équations de deux coniques; et alors $n = 3$, $v + \lambda w = 0$ est l'équation d'une conique quelconque passant par les quatre points d'intersection des deux premières coniques. Pour que cette dernière équation se décompose en deux facteurs linéaires, il faut avoir les trois équations

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0.$$

L'élimination de x_1, x_2, x_3 donne une équation du troisième degré en λ dont les trois racines λ', λ'', λ''' sont les valeurs qu'il faut mettre pour λ dans l'expression $v + \lambda w$ pour qu'elle se décompose en deux facteurs linéaires. Désignons par x'_1, x'_2, x'_3 les trois coordonnées du point d'intersection 1 des deux droites qui correspondent à λ'; de même, par x''_1, x''_2, x''_3 les coordonnées du point d'intersection 2 des deux droites qui correspondent à la valeur λ'', etc., on obtient ces trois systèmes d'équations :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} v'_1 + \lambda' w'_1 = 0, & v''_1 + \lambda'' w''_1 = 0, & v'''_1 + \lambda''' w'''_1 = 0, \\ v'_2 + \lambda' w'_2 = 0, & v''_2 + \lambda'' w''_2 = 0, & v'''_2 + \lambda''' w'''_2 = 0, \\ v'_3 + \lambda' w'_3 = 0, & v''_3 + \lambda'' w''_3 = 0, & v'''_3 + \lambda''' w'''_3 = 0, \end{array} \right.$$

v'_1 est la valeur que prend v_1 en y remplaçant x_1, x_2, x_3 par x' , x'_2, x'_3 et ainsi des autres; de là, on déduit facilement ces deux systèmes d'équations :

$$(6)\left\{\begin{array}{l} x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 = 0, \quad x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3 = 0, \\ x'''_1 v'_1 + x'''_2 v'_2 + x'''_3 v'_3 = 0, \quad x'''_1 w'_1 + x'''_2 w'_2 + x'''_3 w'_3 = 0, \\ x'_1 v''_1 + x'_2 v''_2 + x'_3 v''_3 = 0, \quad x'_1 w''_1 + x'_2 w''_2 + x'_3 w''_3 = 0. \end{array}\right.$$

En effet, on a

$$x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 + \lambda''' (x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3) = 0,$$
$$x'''_1 v''_1 + x'''_2 v''_2 + x'''_3 v''_3 + \lambda'' (x'''_1 w''_1 + x'''_2 w''_2 + x'''_3 w''_3) = 0.$$

Or on a les deux identités

$$x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 = x'''_1 v''_1 + x'''_2 v''_2 + x'''_3 v''_3,$$
$$x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3 = x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3.$$

On obtient ainsi les premières équations des deux systèmes (6). Ces équations expriment que les points 2 et 3 sont des pôles réciproques de la conique $v = 0$ et $w = 0$; ainsi les deux systèmes (6) expriment que les points 1, 2, 3 pris deux à deux sont des pôles harmoniques (*) simultanés des deux coniques $v = 0$ et $w = 0$.

7. *Définition*. On nomme système de *pôles harmoniques* trois points tels, que, pris deux à deux, ils sont pôles harmoniques d'une conique.

8. Deux coniques ont donc toujours un système de pôles harmoniques en commun et ce sont les intersections des diagonales du quadrilatère complet qui a pour sommet les quatre points d'intersection; ce qui est d'ailleurs évident à priori.

En considérant la conique $v = 0$ comme donnée et faisant varier la conique $w = 0$, on obtient de cette manière

(*) Deux pôles sont harmoniques, quand la polaire de l'un de ces points passe par l'autre point.

tous les systèmes possibles des pôles harmoniques de l'équation donnée.

9. *Lemme.* L'équation de la polaire réciproque de la conique $v = 0$, par rapport à la conique directrice

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

est

$$V_{11}x_1x_1 + V_{22}x_2x_2 + V_{33}x_3x_3 + 2V_{23}x_2x_3 + 2V_{31}x_3x_1 + V_{12}x_1x_2 = 0$$

(voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 411); les V ont la même signification que ci-dessus (§ 2).

10. Reprenons les trois équations

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0;$$

si l'on élimine λ, on obtient

$$v_2w_3 - v_3w_2 = 0, \quad v_3w_1 - v_1w_3 = 0, \quad v_1w_2 - v_2w_1 = 0;$$

équations de trois coniques qui passent par les points 1, 2, 3; ainsi l'équation

$$u = b_1(v_2w_3 - v_3w_2) + b_2(v_3w_1 - v_1w_3) + b_3(v_1w_2 - v_2w_1) = 0,$$

où les b sont des constantes arbitraires, représente toute conique qui passe par les points 1, 2, 3, et si l'on fait varier w, cette équation représentera toute conique passant par un système quelconque de pôles harmoniques de la conique $v = 0$. Mais la fonction a s'annule lorsqu'on y remplace x_1x_1, x_1x_2, etc., par V_{11}, V_{12}, etc. (§ 4). Si donc

$$u = a_{11}x_1x_1 + a_{22}r_2x_2 + a_{33}x_3x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2x_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

est l'équation d'une conique passant par un système de pôles harmoniques de la conique $v = 0$, on a la relation

$$a_{11}V_{11} + a_{22}V_{22} + a_{33}V_{33} + 2a_{23}V_{23} + 2a_{31}V_{31} + 2a_{12}V_{12} = 0.$$

C'est une équation générale linéaire de condition entre les coefficients de l'équation d'une conique $u = 0$, on a donc :

THÉORÈME. *Lorsqu'il existe une équation linéaire de condition entre les coefficients de l'équation d'une conique, cette conique passe par le système de pôles harmoniques d'une autre conique déterminée par l'équation de condition.*

Pour trouver cette conique, il suffit de remplacer, dans l'équation de condition, a_{11}, a_{12}, etc., par $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, etc., on a

$$\begin{aligned} V_{11} x_1 x_1 + V_{22} x_2 x_2 + V_{33} x_3 x_3 + 2 V_{23} x_2 x_3 \\ + 2 V_{31} x_3 x_1 + 2 V_{12} x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

La polaire réciproque, par rapport à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, est $v = 0$ (*Lemme* 9) ; c'est la conique cherchée.

11. *Lemme*. Les six points des deux systèmes de pôles harmoniques d'une conique sont sur une seconde conique.

12. En combinant ce lemme avec le théorème précédent, on a :

THÉORÈME. *Lorsque par trois points d'un système de pôles harmoniques d'une conique donnée on fait passer une conique, le périmètre de cette conique renferme une infinité de systèmes de pôles harmoniques de la conique donnée.*

13. Soient $n = 4$, $v = 0$, $w = 0$, équations de deux surfaces du second degré; $v + \lambda w = 0$ est l'équation d'une surface du second degré passant par les courbes d'intersection des deux surfaces données. Pour que cette équation devienne celle d'un cône (surface dont le centre est sur la surface), on doit avoir, en raisonnant comme ci-dessus,

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0, \quad v_4 + \lambda w_4 = 0;$$

l'élimination de x donne une équation du quatrième degré en λ, dont les racines correspondent aux cônes. Les sommets de deux quelconques de ces cônes sont des pôles harmoniques simultanés par rapport aux deux surfaces, c'est ce qu'on démontre comme au § 6.

On nomme *système de pôles harmoniques* d'une surface du second ordre *quatre points* dont deux quelconques sont des pôles harmoniques. Ainsi les quatre sommets 1, 2, 3, 4 des quatre cônes forment un système de pôles harmoniques simultanés pour les deux surfaces, théorème déjà démontré par M. Poncelet.

Si l'on considère la surface $v = 0$ comme donnée et qu'on fasse varier la surface $w = 0$, on obtient, en déterminant chaque fois les sommets des quatre cônes, tous les systèmes de pôles harmoniques possibles de la surface donnée.

14. En éliminant λ de deux quelconques des quatre dernières équations, on obtient six équations de surfaces du second ordre dont chacune passe par les quatre sommets 1, 2, 3, 4 des quatre cônes. Ainsi l'équation suivante

$$\begin{aligned} u = {} & b_{12}[v_1 w_2 - v_2 w_1] + b_{13}[v_1 w_3 - v_3 w_1] + b_{14}[v_1 w_4 - v_4 w_1] \\ & + b_{23}[v_2 w_3 - v_3 w_2] + b_{24}[v_2 w_4 - v_4 w_2] + b_{34}[v_3 w_4 - v_4 w_3] \end{aligned}$$

avec les constantes arbitraires b, représente toute surface du second ordre qui passe par les *quatre* points; mais cette équation représentera toutes les surfaces possibles du second ordre qui passent par un système de pôles harmoniques quelconque de la surface donnée $v = 0$. Si l'on fait varier la fonction w, aussi bien que les constantes b, l'expression a disparaît lorsqu'on y change $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, etc., en V_{11}, V_{12}, etc. Si donc

$$\begin{aligned} u = {} & a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + a_{44} x_4 x_4 \\ & + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 \\ & + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

est l'équation d'une surface du second ordre, qui passe par un système de pôles harmoniques de la surface donnée $v = 0$, on a toujours l'équation

$$a_{11}V_{11} + a_{22}V_{22} + a_{33}V_{33} + a_{44}V_{44} + 2a_{13}V_{13} + \ldots = 0,$$

d'où l'on conclut :

THÉORÈME. *S'il existe une relation linéaire entre les coefficients d'une équation d'une surface du second degré, la surface passe par un système de pôles harmoniques d'une autre surface du second degré déterminée par la relation donnée.*

Pour obtenir cette surface, on remplace dans la relation a_{11}, a_{12}, etc., par x_{11}, x_{12}, etc.; la polaire réciproque de cette surface par rapport à la directrice

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

est la surface cherchée $v = 0$.

15. *Lemme.* Deux systèmes de pôles harmoniques par rapport à la même surface du second ordre peuvent être considérés comme les points d'intersection de trois surfaces du second ordre.

16. A l'aide de ce lemme, on démontre :

THÉORÈME. *Si une surface du deuxième ordre passe par un système de pôles harmoniques d'une surface donnée du deuxième ordre, elle passe par une infinité de ces systèmes.*