Nouvelles annales de mathématiques

Propriétés générales des fonctions algébriques, des surfaces et des lignes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__111_0>

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES, DES SURFACES ET DES LIGNES.

1. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n fonctions algébriques entières, chacune de degré m, entre n variables : le système d'équations

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, \quad A_n = 0, \tag{1}$$

est satisfait par n^m systèmes de n valeurs des variables.

Posons

$$S = \sum_0^n a_p A_p = 0, \tag{2}$$

l'indice sommatoire se rapportant à p; et les a sont des constantes; les n^m systèmes de valeurs des équations (1) satisfont aussi au système de degré m relatives à n valeurs différentes de n équations S', S'', etc., aussi de degré m.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ d'autres n fonctions algébriques entières, chacune de degré m, entre les mêmes variables que les A; le système d'équations

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \quad B_n = 0 \tag{3}$$

admet n^m systèmes des valeurs des variables.

Posons

$$T = \sum_1^n b_p B_p; \tag{4}$$

les b sont des constantes; les mêmes n^m systèmes des valeurs satisfont à n équations de degré m, pour n valeurs différentes de b, savoir T', T'', T'''.

Supposons de plus qu'on ait l'*identité*

$$(5) \qquad \sum_1^n c_p A_p = \sum_1^n d_p B_p = V.$$

Considérant les A et les B comme des inconnues du premier degré, on peut les éliminer de l'identité (5) à l'aide des systèmes (2) et (4), et l'on obtient

$$(6) \qquad V = \sum_1^n (e_p S + f_p T).$$

Les systèmes des valeurs qui satisfont aux équations

$$S', S'', \ldots, T', T'' \ldots,$$

satisfont au système $V = 0$.

2. Soit $n = 3$; A_1, A_2, A_3 représentent trois surfaces qui se coupent en m^3 points; de même B_1, B_2, B_3, etc. : l'identité (5) exprime que les m^3 points du système A et les m^3 points du système B sont sur une même surface V du degré m. Les intersections des trois surfaces S', S'', S''' sont les mêmes que celles du système A, et les intersections des trois surfaces T', T'', T''' sont les mêmes que celles du système B; et l'équation (6) montre que les intersections des surfaces S', T'', T'''; S'', T', T'''; S''', T', T'' sont une même surface V de degré m.

3. Soit $n = 2$; les A, B, S, T représentant des lignes; les m^2 points intersection des A sont les mêmes que les m^2 points intersection des S', S''; les m^2 points intersection de B sont les mêmes que les m^2 points intersection de T', T''; ces $2m^2$ points sont sur une même ligne V de degré m, les m^2 points intersection de S', T'' et les m^2 points intersection de S'', T' sont sur une même ligne de degré m.

Si $m = 2$, on a un théorème énoncé par M. Chasles (*Comptes rendus*, séance du 16 août 1853), qu'il a démontré dans son cours en Sorbonne et dont on peut tirer une foule de corollaires. Voici les énoncés de nouveaux théorèmes qu'on doit à M. Wœpcke (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, p. 345; 1854).

THÉORÈME. *Sur une conique donnée, on prend trois systèmes de quatre points; par chacun de ces systèmes on fait passer respectivement deux coniques, savoir* A_1, C_1; A_2, C_2; A_3, C_3; *les trois systèmes des huit points d'intersection de*

$$\begin{array}{llll} A_1, & A_2; & C_1, & C_2, \\ A_1, & A_3; & C_1, & C_3, \\ A_2, & A_3; & C_2, & C_3, \end{array}$$

sont respectivement sur trois coniques qui ont les mêmes quatre points d'intersection.

Les polaires réciproques fournissent un théorème corrélatif.

Les coniques devenant des cercles, ou un système de deux droites, ou bien devenant homofocales, sont des cas particuliers.

Depuis, M. Wœpcke a étendu les mêmes théorèmes aux surfaces. (Liouville, décembre 1854).