

F. BRIOSCHI

**Sur les fonctions de Sturm**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 13  
(1854), p. 71-80

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1854\\_1\\_13\\_\\_71\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__71_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. BRIOSCHI (F.),

Professeur à l'Université de Padoue.

---

On appelle généralement *fonctions de Sturm*, les résidus que l'on obtient en appliquant la méthode du célèbre auteur à la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique. Il y a déjà quelques années que M. Sylvester a donné *sans démonstration* (voir t. XI, p. 403) des formules qui représentent ces fonctions par des expressions formées avec les racines de ces équations. Ces formules ont été démontrées depuis par M. Sturm (Journal de M. Liouville, t. VII). Partant de

ces formules, MM. Cayley et Borchardt sont parvenus à mettre ces formules sous la forme de *déterminants des puissances* des racines de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XI et XII). Enfin, M. Cayley, en faisant usage de *moyens indirects*, a représenté ces fonctions au moyen des coefficients de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XIII, p. 269; 1848). Le but de cette Note est de parvenir *directement* à des formules analogues à celles de M. Cayley.

*Note du Rédacteur.* Nous croyons nécessaire de faire précéder ce beau travail de quelques lemmes sur les déterminants.

1. *Lemme.* Dans un déterminant, si l'on rend identiques deux colonnes ou deux lignes, le déterminant s'annule.

2. *Lemme.* En multipliant par la même quantité tous les termes d'une même colonne ou d'une même ligne, le nouveau déterminant est égal au premier multiplié par cette quantité.

3. *Lemme.*

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ce lemme existe pour un déterminant quelconque, et est une conséquence immédiate du théorème de Taylor.

1<sup>er</sup> *Corollaire.* Faisant les  $x$  égaux aux  $b$ , on a, en vertu du premier lemme,

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2<sup>e</sup> *Corollaire.*

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

La proposition est une conséquence du précédent corollaire, lorsque  $m$  est un nombre entier positif; et comme il s'agit d'une *identité*, il s'ensuit que la proposition est vraie pour une valeur quelconque de  $m$ .

3<sup>e</sup> *Corollaire*.

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 + ma_1, & c_1 + mb_1 + na_1 \\ a_2, & b_2 + ma_2, & c_2 + mb_2 + na_2 \\ a_3, & b_3 + ma_3, & c_3 + mb_3 + na_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conséquence du précédent corollaire.

1. Soit

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation proposée; et soient  $\varphi_1(x)$  la dérivée du polynôme  $\varphi(x)$ , et  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ , ..., les résidus obtenus par la méthode de M. Sturm. Nous aurons

$$\varphi_2 = \varphi_1 q_1 - \varphi; \quad \varphi_3 = \varphi_2 q_2 - \varphi_1, \dots; \quad \varphi_r = \varphi_{r-1} q_{r-1} - \varphi_{r-2};$$

et de là

$$\varphi_2 = \varphi_1 D_1 - \varphi N_1; \quad \varphi_3 = \varphi_1 D_2 - \varphi N_2, \dots, \quad \varphi_r = D_{r-1} - \varphi N_{r-1};$$

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \dots, \quad \frac{N_{r-1}}{D_{r-1}}$$

étant les réduites successives de la fraction continue

$$\frac{i}{q_1 - \frac{1}{q_2 - \frac{1}{q_3 - \dots}}}$$

où  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , ... sont les quotients du premier degré en  $x$ .

Les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi_{r-1} &= \varphi_1 D_{r-2} - \varphi N_{r-2}, \\ \varphi_r &= \varphi_1 D_{r-1} - \varphi N_{r-1} \end{aligned}$$

donnent, ayant égard à ce que  $N_{r-1} D_{r-2} - N_{r-2} D_{r-1} = 1$ ,

$$\varphi = \varphi_{r-1} D_{r-1} - \varphi_r D_{r-2},$$

$$\varphi_1 = \varphi_{r-1} N_{r-1} - \varphi_r N_{r-2},$$

où

$$\varphi_r \text{ est de degré } n - r,$$

$$D_{r-1} \text{ est de degré } r - 1,$$

$$N_{r-1} \text{ est de degré } r - 2.$$

Faisons

$$\varphi_{(r-1)} = A_{r-1} x^{n-r+1} + \dots,$$

$$N_{r-1} = b_{r-2} x^{r-2} + \dots,$$

$$D_{r-1} = c_{r-1} x^{r-1} + \dots;$$

donc la valeur de  $\varphi$  donne

$$A_{r-1} c_{r-1} = 1;$$

mais

$$q_1 = \frac{1}{n} x,$$

et pour avoir le plus haut terme de  $D_{r-1}$ , il faut multiplier le plus haut terme de  $N_{r-1}$  par  $q_1$ ; donc, ainsi

$$b_{r-2} = n c_{r-1},$$

$$(1) \quad c_{r-1} = \frac{1}{A_{r-1}}, \quad b_{r-2} = \frac{n}{A_{r-1}},$$

$c_{r-1}$  et  $b_{r-2}$  ont donc les mêmes signes; ainsi les trois séries

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}, \varphi_r,$$

$$1, D_1, D_2, \dots, D_{r-1}, D_r,$$

$$0, 1, N_2, \dots, N_{r-1}, N_r,$$

lorsqu'on y fait  $x = +\infty$ , présentent les mêmes successions de permanences et de variations; de même en y faisant  $x = -\infty$ .

Ce sont des séries *signaleticamente equivalenti*.

2. Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les  $n$  racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$



on a, en résolvant les équations,

$$c_0 = \frac{A_r d \Delta_r}{\Delta_r ds_{r-1}}; \quad c_1 = \frac{A_r d \Delta_r}{\Delta_r ds_r}, \dots; \quad c_{l-1} = \frac{A_r d \Delta_r}{\Delta_r ds_{l r-2}};$$

et ayant égard aux équations (2) et (1), l'on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{r-1} = \frac{A_r}{\Delta_r} \\ \times \left[ \frac{d \Delta_r}{ds_{2r-2}} x^{r-1} + \frac{d \Delta_r}{ds_{2r-3}} x^{r-2} + \dots + \frac{d \Delta_r}{ds_r} x + \frac{d \Delta_r}{ds_{l-1}} \right], \\ \frac{A_r d \Delta_r}{\Delta_r ds_{2r-2}} = \frac{1}{A_{r-1}}; \end{array} \right.$$

d'où

$$A_r = \frac{1}{A_{r-1}} \cdot \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}; \quad \text{car } \Delta_{l-1} = \frac{d \Delta_r}{ds_{l r-2}}$$

et comme

$$A_1 = n = \Delta_1 = s_0,$$

on aura, pour  $r$  pair,

$$A_r = \frac{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{r-2})^2}{(\Delta_1 \Delta_3 \dots \Delta_{r-1})^2} \Delta_r;$$

et pour  $r$  impair,

$$A_r = \frac{(\Delta_1 \Delta_3 \dots \Delta_{r-2})^2}{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{r-1})^2} \Delta_r;$$

ainsi le signe de  $A_r$  dépend de  $\Delta_r$ ; c'est ce qui constitue le théorème de M. Borchardt (Journal de M. Liouville, tome XII, page 58), et au moyen de l'équation (3), on a la valeur de  $D_{r-1}$  en fonction des puissances des racines.

3. *Calcul de  $A_r$ .* Calculons maintenant  $A_r$  en fonction des *coefficients* de l'équation; pour fixer les idées, prenons  $r = 4$ ; alors

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la deuxième colonne à la première multipliée par  $a_1$ , on a les six termes

$$(a) \quad \begin{cases} 0 + a_1 \cdot 1; & 1 + a_1 \cdot 0; & 0 + a_1 \cdot 0; \\ s_0 + a_1 \cdot 0; & s_1 + a_1 \cdot s_0; & s_2 + a_1 \cdot s_1; \end{cases}$$

ajoutons la troisième colonne à la deuxième, multipliée par  $a_1$ , et à la première multipliée par  $a_2$ , on a les six termes

$$(b) \quad \begin{cases} 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1; & 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0; & s_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0; \\ s_1 + a_1 \cdot s_0 + a_2 \cdot 0; & s_2 + a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_0; & s_3 + a_1 \cdot s_2 + a_2 \cdot s_1; \end{cases}$$

de même

$$(c) \quad \begin{cases} 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1; & 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0; \\ s_1 + a_1 \cdot s_0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0; & \text{etc.}; \end{cases}$$

et, en vertu du troisième corollaire, et des relations connues entre les puissances des racines et les coefficients de l'équation, on a

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ 0, & 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4, & (n-5)a_5 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5, & 6a_6 \end{vmatrix}.$$

La première colonne est la même que celle de la première expression de  $D_5$ ; la deuxième colonne est la ligne (b); la troisième colonne est la ligne (c), etc.; la loi de formation est évidente.

Ainsi, on a  $A_1$ , et par conséquent  $A_4$ , et en général  $A_r$ , en fonction des coefficients de l'équation.

4. *Calcul de  $D_r$ .* On peut, du reste, obtenir de la même manière  $D_{r-1}$  en fonction des coefficients de l'é-

quation. En effet, on a, par exemple, pour  $r = 3$ ,

$$\begin{aligned} D_2 &= \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ 1, & x, & x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0, & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1, & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_0 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x + a_2 \end{vmatrix} \\ &= - \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \begin{vmatrix} n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2 \\ a, & 2a_2, & 3a_3 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x + a_2 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

or

$$\Delta_1 = s_0 = n;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n, & (n-1)a_1 \\ a_1, & 2a_2 \end{vmatrix}.$$

5. *Calcul de  $\varphi_r$ .* Les fonctions de Sturm peuvent, par le même procédé, s'exprimer facilement en fonction des coefficients de l'équation. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne

$$\frac{\varphi_r(x)}{\varphi(x)} = \sum_1^n \frac{\varphi_r(\alpha_s)}{(x - \alpha_s) \varphi_1(\alpha_s)} = \sum_1^n \frac{D_{r-1}(\alpha_s)}{x - \alpha_s} \quad (\S 2).$$

Faisons

$$u_m = \frac{\alpha_1^m}{x - \alpha_1} + \frac{\alpha_2^m}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{\alpha_n^m}{x - \alpha_n},$$

donc

$$\frac{\Delta_r \varphi_r(x)}{\Delta_1 \varphi(x)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots, & s_{r-1} \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r-2}, & s_{r-1}, & \dots, & s_{2r-3} \\ u_0, & u_1, & \dots, & u_{r-1} \end{vmatrix} \quad (v. \text{ éq. } 3);$$

or

$$u_m = x u_{m-1} - s_{m-1} \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)};$$

donc on obtient, par substitutions successives,

$$(4) \quad \varphi(x) u_m = x^m \varphi_1(x) - f_{m-1}(x) \varphi x,$$

ou

$$f_{(m-1)}(x) = x^{m-1} s_0 + x^{m-2} s_1 + \dots + x s_{m-2} + s_{m-1};$$

l'équation (4) donne

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) [u_m + a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \dots + a_m u_0] \\ = \varphi_1 x [x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m] \\ - \varphi(x) [n x^{m-1} + (n-1) a_1 x^{m-2} + \dots + (n-m+1) a_{m-1}]. \end{array} \right.$$

Faisons, par exemple,  $r=4$ , on a (voir ci-dessus)

$$\frac{\varphi_4 x}{\varphi(x)} = \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ 0, & u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix};$$

procédant par la même méthode de multiplication suivie plus haut, et ayant égard à l'équation (a), on obtient

$$\varphi_4(x) = - \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1 x, & \nu_1, & \nu_2, & \nu \end{vmatrix},$$

où

$$\nu_1 = (x + a_1) \varphi_1 x - n \varphi(x),$$

$$\nu_2 = (x^2 + a_1 x + a_2) \varphi_1(x) - [n x + (n-1) a_1] \varphi(x),$$

$$\nu_3 = [x^3 + a_1 x_2 + a_2 x + a_3] \varphi_1(x)$$

$$- [n x^2 + (n-1) a_1 x + (n-2) a_2] \varphi(x).$$

6. Calcul de N. Soit, par exemple,  $r=4$ ; ayant

égard au lemme (§ 2), on a

$$\varphi_1(x) = - \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3 & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1(x), & (x+a_1)\varphi_1(x), & (x^2+a_1x+a_2)\varphi_1(x), & \\ & & & & (x^3+a_1x_2+a_2x+a_3)\varphi_1(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & 0, & n\varphi(x), & [nx+(n-1)a_1]\varphi(x), & \\ & & & [nx^2+(n-1)a_1, x+(n-2)a_2]\varphi(x) \end{vmatrix}$$

Dans le premier déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par  $\varphi_1(x)$ , le nouveau déterminant est  $D_3$  (§ 4); dans le deuxième déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par  $\varphi(x)$ , on obtient un déterminant que je désigne par  $P$ ; ainsi

$$\varphi_1(x) = D_3 \varphi_1(x) + \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 \varphi(x) \cdot P;$$

or

$$N_3 \varphi(x) = D \varphi_1(x) - \varphi_1(x) \quad (\S 2),$$

donc

$$N = - \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3} \right)^2 P;$$

la loi de formation se voit facilement

*Note.* Le savant analyste a trouvé aussi la valeur générale de  $N_r$ , celle des quotients et des relations entre ces valeurs que nous insérerons prochainement, ainsi qu'un beau travail de M. Sylvester sur ces valeurs et ces relations, lors même que  $\varphi_1(x)$  n'est pas la dérivée de  $\varphi(x)$ .