NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

Séparation des racines d'une équation algébrique par la méthode des différences

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 60-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__60_0>

SÉPARATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES;

PAR M. DESBOVES,
Professeur au Lycée Bonaparte.

I.

Le but de cet article est de montrer comment on peut rendre plus expéditive et plus sûre l'application de la méthode des différences au problème de la séparation des racines. Nous ne nous occuperons ici que des équations algébriques, et nous prendrons d'abord pour exemple l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0;$$

le tableau (A)

TABLEAU (A).

x	-18	-17		-1	0	1	2	3	4	5
y	-251	180	...	293	181	91	29	1	13	71
Δ	430	352	...	-112	-90	-62	-28	12	58	110
Δ_2	-80	-74	...	22	28	34	40	46	52	58
Δ_3	6	6	...	6	6	6	6	6	6	6

qui met sous les yeux du lecteur les premiers calculs relatifs à la séparation des racines de l'équation proposée, nous permettra de rappeler brièvement la marche ordinairement suivie. On sait qu'après avoir calculé une première ligne verticale contenant les nombres 293, — 112, 22, 6, on forme, vers la droite et vers la gauche du tableau, des lignes de nombres parallèles à la première et qui se déduisent chacune de la précédente. On arrête d'ailleurs le tableau vers la droite et vers la gauche, aux nombres 5 et — 18, à moins que la simple inspection de l'équation n'ait déjà donné des limites préférables; 5 et — 18 sont, en effet, les limites respectives des racines positives et négatives de l'équation, puisque les colonnes verticales correspondant à $x = 3$ et $x = -18$, contiennent, la première, des nombres tous positifs, la seconde, des nombres alternativement positifs et négatifs (*).

Le tableau (A) étant formé, on en déduit un autre tableau (A′) correspondant à des valeurs de x équidistantes d'un dixième; de celui-ci on en déduit un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les racines soient entièrement séparées : telle est la méthode que l'on suit habituellement.

Une première simplification que j'introduis dans la méthode, consiste à remplacer du côté des x positifs le calcul des lignes verticales par le calcul des lignes obliques comme l'indique le tableau (B) :

TABLEAU (B).

x	-1	0	1	2	3	4
y	293	181	91	29	1	13
Δ	-112	-90	-62	-28	12	
Δ_2	22	28	34	40		
Δ_3	6	6	6			

(*) Limite du programme officiel. — Autre limite non formulée dans le programme, mais qui se démontre de même.

Une première ligne oblique formée des nombres 6, 22, — 90, 91 étant calculée à la manière ordinaire, on en déduit la ligne suivante qui contient les nombres 6, 28, — 62, 29, d'après les égalités

$$28 = 22 + 6; \quad -62 = 28 - 90; \quad 29 = 91 - 62;$$

et ainsi de suite.

Le tableau (B) étant construit, on en déduira un tableau (B′) de nouvelles lignes obliques correspondant à des valeurs de x équidistantes d'un dixième; du tableau (B′) on déduira un tableau (B″), et ainsi toujours de même.

On voit, d'après le tableau (B) comparé au tableau (A), que l'on connaîtra maintenant le résultat de la substitution d'un nombre, 3 par exemple, par le calcul d'un moins grand nombre de différences, et l'on aura d'ailleurs l'avantage d'être conduit par ce calcul à une limite supérieure des racines positives de l'équation plus simple et plus avantageuse que la limite du programme. Nous allons, en effet, démontrer tout à l'heure que les tableaux (B), (B′), etc., sont terminés dès que les nombres écrits dans une ligne oblique sont tous positifs. Ainsi, d'après cette règle, 4 est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée, tandis que nous avions trouvé 5 d'après l'ancienne règle : l'avantage de la nouvelle limite sera, en général, d'autant plus marqué que l'équation sera d'un degré plus élevé.

Si, par exemple, on applique la règle du programme à l'équation

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0,$$

dont Fourier s'est occupé, on trouve 8 pour limite supérieure des racines positives, tandis que notre règle conduit au nombre 4; il est d'ailleurs facile de voir que notre limite, qui est généralement inférieure à l'autre, ne peut jamais être plus grande ; mais je n'insiste pas plus longtemps sur ces détails.

II.

Le théorème que nous proposons de démontrer est une conséquence immédiate de la formule

$$(1)\left\{\begin{aligned} f(x) &= fa + \frac{x-a}{h}\Delta(a-h) + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\Delta_2(a-2h) + \ldots \\ &+ \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\cdots\left(\frac{x-a}{h}+m-1\right)\Delta_m(a-mh), \end{aligned}\right.$$

qui peut remplacer dans tous ses usages la formule ordinaire d'interpolation : elle diffère de cette dernière, comme on voit, par les coefficients des différences et par les différences elles-mêmes. Les différences ne sont plus relatives à une même valeur de la variable x, mais à des valeurs $a-h$, $a-2h$,..., $a-mh$, décroissant suivant la raison d'une progression arithmétique. Il est bien entendu, d'ailleurs, que nous supposons que $f(x)$ est un polynôme entier du degré m, et, par suite, que la différence $(m+1)^{\text{ième}}$ est nulle.

Démonstration de la formule (1). — Nous remarquons d'abord que, par la construction même du tableau (B), chacun des nombres d'une ligne oblique est la somme de tous les nombres de la ligne oblique précédente jusqu'au nombre de même rang que lui. Ainsi, par exemple, la ligne correspondant à $x=1$ ayant été calculée, on a chacun des nombres de la colonne suivante par les inégalités

$$6=6,\quad 28=22+6,\quad -62=-90+22+6,$$
$$29=91-90+22+6.$$

On voit par là que chacune des lignes obliques se déduit de la précédente, comme une ligne horizontale du triangle de Pascal se déduit de celle qui la précède; seulement les nombres de la première ligne oblique ne sont pas égaux à l'unité, comme les nombres de la première ligne horizontale du triangle arithmétique.

Mais si l'on écrit sur une première ligne horizontale $(m+1)$ nombres quelconques P, M, N,..., B, C, A, au-dessous une seconde ligne horizontale déduite de la première d'après la propriété caractéristique du triangle de Pascal que nous venons de rappeler, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait en tout $n+1$ colonnes horizontales, on formera un triangle tout à fait analogue au triangle arithmétique. On voit alors facilement que le $(m+1)^{ième}$ nombre de la $(n+1)^{ième}$ colonne horizontale du nouveau triangle s'obtiendra en multipliant les nombres de la $n^{ième}$ colonne du triangle ordinaire respectivement par A, B, C,..., M, N, P.

En appliquant cette remarque aux tableaux (B), (B'),..., on peut supposer que A, B, C,..., M, N, P représentent respectivement

$$f(a),\quad \Delta(a-h),\quad \Delta_2(a-2h),\ldots,\quad \Delta_m(a-mh),$$

c'est-à-dire les nombres de la ligne oblique correspondant à $x=a$, dans celui des tableaux (B), (B'),..., pour lequel l'intervalle des valeurs de x est égal à h.

Le $(m+1)^{ième}$ nombre de la $(n+1)^{ième}$ colonne oblique est d'ailleurs $f(a+nh)$; on aura donc la formule

$$f(a+nh)=f(a)+n\Delta(a-h)+\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta_2(a-2h)+\ldots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}\Delta_m(a-mh);$$

et si l'on pose

$$a+nh=x,$$

d'où

$$n = \frac{x-a}{h},$$

la formule devient

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{x-a}{h}\right)\Delta(a-h) + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\Delta_2(a-2h) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\cdots\left(\frac{x-a}{h}+m-1\right)\Delta_m(a-mh),$$

et l'on voit facilement que si l'on y fait successivement

$$x = a, \quad x = a+h, \ldots, \quad x = a+mh,$$

la fonction $f(x)$ prend, en effet, les valeurs correspondantes qu'elle doit avoir. Le second membre de la formule précédente étant égal au polynôme $f(x)$ pour $(m+1)$ valeur de x, lui est complétement identique, la formule d'interpolation (1) est donc démontrée.

Si maintenant, pour une certaine valeur $x = a$, les nombres

$$f(a), \quad \Delta(a-2h), \quad \Delta_2(a-2h), \ldots, \quad \Delta_m(a-mh),$$

c'est-à-dire les nombres d'une ligne oblique, sont des nombres positifs, la formule d'interpolation (1) prouve que pour toute valeur de x égale ou supérieure à a, $f(x)$ restera toujours positive; a est donc une limite supérieure des racines positives de l'équation.

III.

Il faut maintenant montrer comment le tableau que nous avons appelé (B') se déduit du tableau (B).

La question revient à trouver les équations qui lient les δ et Δ des lignes obliques (comme dans le Mémoire de M. Vieille, les δ et Δ correspondent respectivement aux intervalles h et 1).

M. Vieille a trouvé les équations qui lient les δ et Δ des lignes verticales en égalant les coefficients des mêmes puissances de X dans les deux développements identiques

$$f(a+X)=f(a)+X\frac{\delta}{h}+\frac{X}{h}\left(\frac{X}{h}-1\right)\frac{\delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{X}{h}\left(\frac{X}{h}-1\right)\left(\frac{X}{h}-2\right)\frac{\delta_3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$f(a+X)=f(a)+X\Delta+X(X-1)\frac{\Delta_2}{1.2}$$
$$+X(X-1)(X-2)\frac{\Delta_3}{1.2.3}+\ldots;$$

mais si nous posons $x-a=X$ dans notre formule d'interpolation, il viendra

$$f(a+X)=f(a)+X\frac{\delta}{h}+\frac{X}{h}\left(\frac{X}{h}+1\right)\frac{\delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{X}{h}\left(\frac{X}{h}+1\right)\left(\frac{X}{h}+2\right)\frac{\delta_3}{1.2.3};$$

si, de plus, on fait $h=1$, on aura

$$f(a+X)=f(a)+X\Delta+X(X+1)\frac{\Delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{X(X+1)(X+2)}{1.2.3}\frac{\Delta_3}{1.2.3}+\ldots$$

[pour plus de simplicité dans l'écriture, nous avons supprimé les indices $(a-h)$, $(a-2h)$,..., dans les deux derniers développements].

La méthode de M. Vieille donnera encore les équations entre les nouveaux δ et Δ par l'identification des coefficients des mêmes puissances de x dans les deux derniers développements; mais on remarque que ces deux derniers développements se déduisent des deux précédents par le changement de X en $-$X, et par le changement de signe des δ et Δ d'indice impair. On voit ainsi que les premières relations entre les δ et Δ donneront immédiatement les secondes par le simple changement de signe des coefficients des δ et Δ dont l'indice est impair; il est dès lors permis de dire que la méthode que nous proposons ne conduit à aucun calcul nouveau, les nouvelles équations étant connues par cela même que les autres le sont, et réciproquement.

IV.

Dans le paragraphe précédent, notre but était plutôt d'arriver à la conclusion que nous venons d'énoncer que d'indiquer un moyen simple de former les équations entre les δ et les Δ.

Mais nous allons maintenant donner une règle pratique très-commode pour écrire immédiatement ces équations.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de séparer les racines d'une équation du quatrième degré, et soit proposé, par exemple, de trouver les relations entre les δ et les Δ des lignes obliques.

Les quatre équations seront

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta}{1}+\frac{\delta_2}{2}+\frac{\delta_3}{3}+\frac{\delta_5}{4}=h\left(\frac{\Delta}{1}+\frac{\Delta_2}{2}+\frac{\Delta_3}{3}+\frac{\Delta_4}{4}\right),\\
&\delta_2+\delta_2+\frac{11}{12}\delta_4=h^2\left(\Delta_2+\Delta_3+\frac{11}{12}\Delta_4\right),\\
&\delta_2+\frac{3}{2}\delta_4=h^3\left(\Delta_3+\frac{3}{2}\Delta_4\right),\\
&\delta_4=h^4\Delta_4;
\end{aligned}\right.$$

le premier membre de la première équation s'obtient en divisant δ, δ_2, δ_3, δ_4 respectivement par leurs indices, et faisant la somme des quotients.

Pour avoir le premier membre de la seconde équation, on fait une opération analogue à celle de la multiplication abrégée des nombres; on multiplie

$$\frac{\delta}{1} + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{3} + \frac{\delta_4}{4}$$

par

$$\frac{\delta_3}{3} + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta}{1},$$

en commençant chaque produit partiel au terme du multiplicande qui est au-dessus du terme du multiplicateur. On ajoute, d'ailleurs, les indices comme s'ils représentaient des exposants. Le calcul est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{r|r|l}
\delta_2 + \frac{1}{2} & \delta_3 + \frac{1}{3} & \delta_4\,; \\
+ \frac{1}{2} & + \frac{1}{4} & \\
 & + \frac{1}{3} & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{\delta_2 + \delta_3 + \frac{11}{12}\delta_4\,;}
\end{array}$$

pour avoir le premier membre de la troisième équation, on multiplie, suivant la règle précédente,

$$\delta_2 + \delta_3 + \frac{11}{12}\delta_4$$

par

$$\frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta}{1};$$

et ainsi de suite.

Les équations (α) montrent, d'ailleurs, comment on peut écrire immédiatement les seconds membres quand les premiers sont calculés.

Les équations entre les δ et Δ des lignes verticales s'obtiendraient par un procédé analogue, ou, si les équations (α) étaient déjà formées, on les déduirait des équations (α) par la règle que nous avons précédemment donnée.

La règle pratique que nous venons de démontrer est la conséquence immédiate de la formule symbolique

$$h^n f^n(x) = [-l(1-\Delta)]^n,$$

dans laquelle $f^n(x)$ est la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction quelconque de x, et l la lettre qui indique un logarithme népérien. Après avoir développé la $n^{ième}$ puissance du logarithme népérien de $(1-\Delta)$, et remplacé les exposants par des indices, on a une formule qui fait connaître les dérivées de la fonction au moyen des différences des lignes obliques. La formule s'applique en particulier aux fonctions algébriques en considérant comme nulles les différences d'indice supérieur au degré m de la fonction. Elle n'avait pas, je crois, encore été remarquée. Elle est, du reste, analogue à la formule connue de Lagrange

$$h^n f^n(x) = [l(1+\Delta)]^n,$$

dans laquelle les Δ sont les différences des lignes verticales. Les deux formules se démontrent, d'ailleurs, d'une manière à peu près semblable.

Remarquons en passant que notre formule donne une nouvelle démonstration du théorème de limite démontré au § II, si l'on s'appuie sur le théorème bien connu de Newton. On généralise ainsi la démonstration que M. Fournier-Vanson avait crue applicable seulement aux équations du troisième et du quatrième degré.

V.

Ordinairement, après avoir trouvé les équations entre les δ et les Δ, on les résout par rapport à δ, δ_2, δ_3,..., et c'est sous la nouvelle forme qu'on les applique; mais si l'on remarque que les équations (α), telles qu'on les a trouvées d'abord, sont toutes préparées pour le calcul, puisque la dernière ne contient que δ_4, l'avant-dernière δ_4 et δ_3, et ainsi de suite, on voit que la substitution d'une forme à l'autre ne présente guère d'avantage; mais je dis qu'il importe, au contraire, de conserver aux équations leur forme primitive.

En effet, la formule

$$f(a+\mathrm{X})=f(a)+f'(a)\frac{\mathrm{X}}{1}+f''a\frac{\mathrm{X}^2}{1.2}+\ ..,$$

démontrée dans les cours d'algèbre, étant rapprochée de l'une quelconque des quatre formules d'interpolation écrites au § III, montre que les derniers membres des équations tels que (α) sont, pour une valeur $x=a$, de même signe respectivement que $f(a)$, $f'(a)$,..., $f^m(a)$. Mais d'après le théorème de Fourier, les deux successions de signes que présente la suite des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,..., pour deux nombres a et b, donnent une limite supérieure du nombre des racines de l'équation comprises entre a et b; on devra donc, pour procéder régulièrement à la séparation des racines, voir quels sont les signes des seconds membres des équations tels que (α) (*); le théorème de Fourier pourra alors indiquer des intervalles où il est inutile de chercher des racines, et le calcul se trouvera abrégé de beaucoup.

Lorsque, par la considération directe de l'équation ou la discussion du problème qui y a conduit, on saura que l'équation a toutes ses racines réelles et inégales, ou que, du moins, ce qui arrive le plus souvent, on connaîtra leur nombre, on sera conduit sûrement et de la manière la plus rapide à la séparation des racines.

Nous avons supposé, dans notre travail, que l'équation proposée était algébrique, mais on voit bien que la méthode peut s'étendre aux équations transcendantes.

La méthode des différences, telle que nous l'avons mo-

(*) Si les signes correspondant à un nombre a sont tous positifs, a sera une limite supérieure des racines positives. On peut, du reste, démontrer que cette limite a (supposée entière pour plus de simplicité) ne peut jamais être inférieure de plus de ($m-1$) unités à la limite du programme et à plus forte raison à celle que nous avons fait connaître.

difiée, a beaucoup d'analogie avec la méthode de Budan; mais nous la préférons à cette dernière à cause de la régularité et de l'uniformité des opérations, et surtout à cause de sa facile extension aux équations transcendantes.

Nota. La formule d'interpolation que nous avons démontrée § II est comprise dans une formule plus générale donnée par Laplace dans son *Calcul des Probabilités*. Cette formule est la suivante :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta(a-rh)$$
$$+\left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a}{h}+2r-1\right)\Delta_2(a-2rh)$$
$$+\left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a}{h}+3r-1\right)\left(\frac{x-a}{h}+3r-2\right)\Delta_3(a-3rh)+\dots$$

En y faisant $r=1$, on retrouve notre formule.

J'ai démontré, du reste, la formule de Laplace à l'aide du triangle arithmétique, comme je l'ai fait pour la formule particulière.