Observations sur le rapprochement théorique et pratique des formes réelles et imaginaires dans certaines recherches par approximation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 449-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__449_0>

OBSERVATIONS

Sur le rapprochement théorique et pratique des formes réelles et imaginaires dans certaines recherches par approximation.

Au Rédacteur.

Monsieur,

Dans une Note que vous avez insérée, page 40 du numéro de janvier 1854 de votre Recueil, vous faites remarquer avec juste raison que, lorsque dans une équation les valeurs des coefficients ne sont qu'approchées, il pourra arriver que les racines de cette équation, de réelles qu'elles étaient pour un certain degré d'approximation, pourront devenir imaginaires pour un autre degré très-rapproché d'ailleurs du précédent, et vous ajoutez que ce point d'analyse, vu son importance pratique, mérite d'être éclairci.

Cet appel que vous faites aux géomètres ne tend à rien moins qu'à provoquer une explication rationnelle de la forme imaginaire; et il est certain que si nous étions aussi bien fixés sur la signification qu'il faut, dans la pratique, attribuer à cette forme, que nous le sommes aujourd'hui sur celle des formes positive et négative, la question que vous avez posée serait à peu près résolue.

Cette question, Monsieur, après les explications que j'ai données sur les expressions imaginaires, dans mon ouvrage intitulé : *Études philosophiques sur la science du calcul* (*), ne présente, à mon point de vue, aucune difficulté. Mais, comme cet ouvrage a été peu répandu,

(*) Ire partie, 1841, in-8 de 283 pages

et que, très-probablement, un fort petit nombre de vos lecteurs en a pu prendre connaissance, je ne peux entreprendre de présenter ici des vues générales susceptibles de donner des explications complètes sur le point d'analyse que vous désirez voir éclairci. Mais, à défaut de tout point d'appui sur les principes constitutifs de cette partie de la science, principes longuement développés dans l'ouvrage que je viens de rappeler, et en ayant seulement recours aux errements ordinaires, il est possible, ce me semble, de présenter quelques développements susceptibles de faire disparaître, sinon en totalité, du moins en partie, ce que peut présenter d'obscur, dans ses applications pratiques, le fait analytique que vous avez signalé.

Dans les idées généralement admises, il y a pour ainsi dire un abîme entre l'imaginaire et le réel, puisque nous refusons de comprendre l'un, tandis que nous comprenons et expliquons parfaitement l'autre, non-seulement dans son ensemble, mais encore dans la multiplicité de tous ses détails. Il est certain qu'en envisageant les choses à ce point de vue, c'est un fait très-surprenant que celui qui, comme vous le dites, au moyen de la plus légère altération dans les coefficients réels d'une équation, peut faire passer les racines de cette équation de la réalité à l'imaginarité, et *vice versâ.*

Mais, au fond, si cet abîme supposé entre les deux formes n'existait pas, si elles se rapprochaient, dans certains cas, de manière à pouvoir être prises l'une pour l'autre, suivant le degré d'approximation qu'on veut introduire dans les calculs, s'il en était ainsi, dis-je, tout ce que le fait signalé a pu présenter d'extraordinaire au premier abord disparaîtrait à peu près complétement, et le passage du réel à l'imaginaire ne serait plus, dans ce cas, qu'une affaire d'approximation, tout comme en était une le remplacement du premier coefficient par un autre très-voisin de lui ; il y aurait ainsi concordance parfaite entre la modification qu'on fait subir à l'énoncé et celle que l'algèbre introduit dans sa réponse.

Or l'étude algébrique approfondie des formes imaginaires fait voir que c'est bien ainsi que les choses se passent ; mais, je le répète, je ne peux reproduire ici cet aspect général de la question. A défaut de ce moyen théorique, je vais essayer de faire comprendre ma pensée par un exemple fort simple, et montrer qu'il nous arrive très-souvent d'accepter dans la pratique comme très-réelles des solutions que la théorie devrait nous forcer à considérer comme imaginaires. Tout dépendra, comme on va le voir, et comme je l'ai annoncé ci-dessus, du degré d'approximation qu'on s'est imposé.

Soit O le centre d'une circonférence dont le rayon R est connu à un centième près seulement, en plus ou en moins ; soit A un point extérieur à cette circonférence, et supposons qu'on demande de lui mener une tangente par le point A.

Ayant décrit, avec la valeur numérique connue du rayon et du point O comme centre, la circonférence donnée, puis, sur AO comme diamètre, en ayant décrit une seconde qui rencontre la première au point T (*), on joindra T avec A, et l'on aura ainsi la tangente demandée. Il est évident qu'eu égard à l'approximation avec laquelle le rayon du cercle donné a été déterminé, la droite AT résoud le problème, et personne, assurément, ne refusera de l'accepter comme remplissant bien cette fonction.

Mais il est évident aussi qu'eu égard à la véritable valeur du rayon, l'expression algébrique de cette tangente, indépendamment du cas où elle se trouverait être la tangente réelle, peut présenter deux autres cas distincts. En

(*) Il y a deux points d'intersection. L'imaginarité entraîne toujours un nombre pair d'intersections. Tm.

effet, puisque tout ce qu'on sait de la valeur numérique du rayon, c'est qu'elle n'est exacte qu'à un centième près, soit en plus, soit en moins, il se pourrait que la valeur véritable fût plus grande ou plus petite qu'elle d'une quantité dont la limite serait comprise entre $+\frac{1}{100}$ et zéro d'une part, et entre o et $-\frac{1}{100}$ de l'autre. Or, dans le premier cas, ce qu'on aura pris pour la tangente sera, en réalité, une sécante coupant la circonférence en deux points dont les positions sur cette circonférence seront facilement assignables, tandis que, dans le second, ce sera une droite complétement extérieure au cercle pour laquelle l'expression analytique des deux points de rencontre sera devenue imaginaire; et cependant cette ligne, quoique jouissant de propriétés analytiques imaginaires, n'en continuera pas moins, dans la pratique, à être acceptée comme résolvant réellement la question, dans la limite d'approximation qu'on s'est donnée.

Nous trouvons donc, dans ces considérations concrètes de la géométrie, une image frappante de valeurs réelles et de valeurs imaginaires placées bien près l'une de l'autre, liées entre elles par une continuité non interrompue, concourant vers une limite qui serait le point T, dans le cas où la valeur donnée du rayon serait la véritable, dont toutes les différences, en convergeant vers cette limite, s'atténuent de plus en plus à mesure que les écarts de l'approximation se resserrent, et qui, par conséquent, dans toute la série des valeurs par lesquelles passe cette approximation, peuvent être indistinctement prises l'une pour l'autre.

Si donc, lorsqu'on reste dans le domaine purement analytique, la concordance qui existe entre la variation qu'on fait subir à des quantités réelles d'une part, et le passage réel à l'imaginaire qu'éprouvent d'autre part, à la suite de ces mêmes variations, certaines expressions fonctions des premières, est de nature à se présenter à l'esprit avec quelque confusion, on a pu se convaincre, par l'exemple que nous venons de citer, que les considérations concrètes sont susceptibles de jeter quelques clartés sur ce point délicat de la métaphysique du calcul. Car, bien que la ligne AT, lorsque la valeur du rayon est plus petite que la valeur donnée, revête, pour quelques-unes de ses propriétés, la forme imaginaire, elle ne disparaît pas entièrement pour cela, elle continue à subsister, à représenter approximativement la tangente, à exercer une fonction que l'algèbre pure, en revêtant la forme imaginaire, semblerait lui refuser.

Pour compléter ces explications, il faudrait maintenant dire ce que sont les points de rencontre imaginaires de la sécante extérieure, montrer qu'ils ne sont imaginaires que de nom, fixer le lieu géométrique qu'ils doivent occuper, indiquer à quelle modification de l'énoncé primitif correspond la manifestation inattendue de la racine carrée de l'unité négative; mais, pour cela, ce seraient tous les principes constitutifs de la théorie que j'ai exposée dans mon ouvrage qu'il faudrait reproduire ici.

Ce qui, jusqu'à ce jour, a laissé dans l'ignorance en ce qui concerne l'interprétation des expressions imaginaires, c'est qu'aussitôt que cette forme, après avoir apparu dans le calcul, doit passer dans le domaine des applications, nous nous arrêtons comme devant une barrière infranchissable, nous disons que nous ne comprenons plus, et nous ne faisons aucun effort pour soulever le plus petit coin du voile qui nous dérobe l'intelligence de l'énigme figurée par $\sqrt{-1}$.

C'est ainsi qu'avaient agi les anciens géomètres à l'égard des résultats négatifs, et, parce qu'ils ne les avaient pas d'abord compris, ils leur avaient donné le nom de fausses solutions. Nous savons cependant aujourd'hui que ces solutions ne sont pas plus fausses que celles qui se présentent avec le signe additif; nous les interprétons fort bien, soit en elles-mêmes, soit relativement aux modifications que leur manifestation peut rendre nécessaires dans l'énoncé primitif de la question.

Or, si aujourd'hui nous sommes encore dans l'impossibilité de savoir ce qu'est l'imaginaire en lui-même, nous pourrions du moins, dans beaucoup de cas, malgré cette impossibilité d'interpréter une racine de cette forme, nous rendre compte des indications que sa manifestation algébrique peut donner pour nous conduire à une transformation de l'énoncé telle, que l'obstacle imaginaire cessât d'en être un.

Faisons mieux comprendre notre pensée par un exemple.

Si l'on a l'équation

$$x + y = a,$$

on en déduit

$$y = a - x;$$

par conséquent, lorsqu'on prendra pour x une valeur supérieure à la quantité a, comme, par exemple, $a + p$, il viendra

$$y = -p.$$

Or, que je sache ou que je ne sache pas ce que peut être en elle-même une valeur négative, je n'en verrai pas moins que si, pour tous les cas où x dépasse a, je substitue à l'énoncé primitif $x + y = a$ de la question le suivant $x - y = a$, j'obtiendrai, pour tous ces cas, du positif, c'est-à-dire un résultat toujours réalisable. Sans doute je n'aurai pas ainsi tout appris ; je pourrai rester encore dans l'ignorance sur la signification d'un nombre négatif: mais je serai du moins fixé sur l'espèce de réaction que la présence de ce nombre doit exercer sur la question proposée ; je connaîtrai un de ses effets, et n'est-ce pas toujours par la connaissance préalable des effets que nous pouvons espérer d'arriver à la découverte de celle des causes ?

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué : supposons qu'au lieu de chercher deux quantités dont la somme soit a, on veuille en déterminer deux dont la somme des carrés soit a^2. L'expression analytique du problème sera

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

et l'on en déduira

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Tant que x sera moindre que a, il ne se présentera aucune diffficulté ; mais si x est égal à $a + p$, on aura

$$y = \sqrt{-2pa - p^2} = \sqrt{p(2a+p)}\sqrt{-1},$$

et, parce que ce résultat est imaginaire, on arrête le calcul, on abandonne la question, on ne va pas plus loin, du moins dans la pratique.

Cependant, comme nous allons le montrer, il reste encore quelque chose à faire.

En effet, de ce que la valeur de y est égale au produit d'une quantité par $\sqrt{-1}$, il s'ensuit que celle de y^2 se présente sous la forme négative. Cela prouve évidemment que, dans le cas actuel, le carré arithmétique représenté par y^2, au lieu d'être ajouté à celui de x, devra lui être retranché. En modifiant ainsi l'énoncé du problème, les conditions auxquelles il faut satisfaire continuent d'être possibles. Voyons maintenant quelle conséquence il doit résulter de cette modification pour la racine cherchée et pour l'usage qu'on en doit faire.

Or il est évident que cette racine, une fois trouvée arithmétiquement, doit, par voie de multiplication, conduire au carré arithmétique qui, d'après l'énoncé primitif de la question, devrait, étant ajouté à celui de x, reproduire a^2. Reste donc à savoir s'il n'y a pas quelque facteur en algèbre qui, accompagnant cette racine dans la multiplication qu'on doit en faire par elle-même et fonctionnant dans cette multiplication comme la racine y fonctionne elle-même, n'arrangera pas naturellement le produit de telle manière qu'on voie clairement que ce produit, au lieu d'être ajouté, doit être retranché. La réponse à cette question est toute faite. Quelle est, en effet, l'expression algébrique qui, employée deux fois comme facteur, fait passer du positif au négatif? C'est évidemment $\sqrt{-1}$; et voilà pourquoi nous trouvons pour y la valeur $\sqrt{p(2a+p)}\ \sqrt{-1}$.

Ainsi, dans tout problème arithmétique où l'inconnue sera élevée à la deuxième puissance, lorsqu'on trouvera pour la valeur de cette inconnue une racine imaginaire de la forme $A\sqrt{-1}$, cela ne veut pas dire d'une manière absolue que le problème est impossible, mais qu'il faut en changer l'énoncé de manière à faire figurer, dans l'équation qui exprime cet énoncé, la deuxième puissance de l'inconnue avec un signe contraire à celui qui avait été d'abord employé. N'est-ce pas là un procédé exactement pareil à celui qu'on emploie journellement lorsque dans une question les solutions négatives se manifestent?

Ceci ne dit pas tout, à coup sûr, mais du moins entre l'explication complète et l'immobilité nous avons fait quelques pas.

Permettez-moi maintenant de vous présenter quelques observations purement analytiques qui pourront contribuer pour leur part à rendre plus intelligible la relation qui existe, d'une part entre les variations réelles qu'on fait subir aux coefficients d'une équation, et les passages du réel à l'imaginaire que peuvent subir d'autre part les racines de cette équation.

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer, au sujet de quelques principes que nous allons citer, dans aucun développement, et en prenant les choses telles qu'elles sont établies aujourd'hui dans la science, nous rappellerons que lorsqu'une équation renferme des racines imaginaires, elles marchent nécessairement par couples de la forme

$$p+q\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad p-q\sqrt{-1}.$$

Or quelles sont les opérations arithmétiques, dans la combinaison qu'on peut faire entre elles de ces deux expressions, à l'aide desquelles l'imaginaire disparaît? C'est, d'une part, l'addition qui donne $2p$, et la multiplication dont le produit est p^2+q^2.

Cela posé, si a_1, a_2, a_3,..., a_n sont les racines d'une équation du n^{ieme} degré, son premier membre sera constitué comme il suit :

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

et l'on voit que dans la série des opérations qu'il faudra faire pour obtenir le polynôme final ordonné suivant les puissances de x, il n'entrera précisément que des additions et des multiplications, d'où l'on comprend spontanément la possibilité que, dans ce premier membre, tout ce qu'il y a d'imaginaire dans les racines disparaisse. Cette première induction est d'ailleurs confirmée par le calcul, puisqu'en prenant deux facteurs binômes quelconques

$x - a_1$, $x - a_2$, que rien n'empêche de supposer appartenir à deux racines imaginaires conjuguées, leur produit sera

$$x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2,$$

dont les coefficients réalisent précisément les opérations sous l'influence desquelles les imaginaires disparaissent.

Le premier membre d'une équation est donc une fonction composée dans laquelle les lois mêmes de sa composition expliquent très-bien l'absence des imaginaires, tandis que les valeurs algébriques des racines, devant nécessairement contenir les expressions des opérations décomposantes et en particulier de l'extraction des racines, seront susceptibles de produire toutes les circonstances de cette extraction et par suite les imaginaires.

Or, dès l'instant qu'il est reconnu que la réalité des coefficients peut correspondre indistinctement à la réalité ou à l'imaginarité des racines, il n'y aura rien de surprenant à ce que la variation de ces coefficients fasse passer de l'une de ces formes à l'autre; on peut même dire qu'il n'y a pas d'autre moyen que ces variations pour réaliser ce passage dans les racines.

Ces variations peuvent d'ailleurs être conduites par voie de continuité et de rapprochement aussi petit qu'on voudra, de sorte que, les racines ne pouvant demeurer ni toujours réelles ni toujours imaginaires, on est forcément obligé d'admettre que, dans la série infinie des valeurs que peuvent prendre les coefficients, il y aura des points où la plus petite variation dans ces valeurs produira le passage du réel à l'imaginaire.

Au reste, c'est moins encore dans le domaine purement analytique que dans celui des applications concrètes que des explications à ce sujet étaient à désirer, parce que, dans le premier, l'imaginaire aussi bien que le réel est parfaitement admis, on formule également avec l'un comme avec l'autre et, malgré l'ignorance où l'on est sur la nature de l'état imaginaire, on en fait continuellement intervenir la forme dans les calculs.

Mais il n'en est pas de même dans le domaine des applications, où cet usage est absolument interdit, parce qu'on ignore complétement ce que peut être la chose elle-même. Il y avait donc quelque importance à faire voir que par le fait, dans la pratique, nous nous servons parfois de l'imaginaire pour du réel. Un grand nombre d'exemples géométriques, indépendamment de celui que nous avons traité, pourraient être cités à l'appui de cette affirmation, presque toutes les recherches de lignes et de points par approximation ne sont pas autre chose, et c'est là le point important du débat, parce qu'il en résulte une assimilation précieuse entre la science analytique et les faits naturels.

Il sera résulté de plus de cette discussion, nous l'espérons, que le réel et l'imaginaire ne sont pas si éloignés, si antipathiques l'un de l'autre qu'on a pu le croire jusqu'ici, et n'y aurait-il d'autre résultat produit par les observations qui précèdent que l'introduction de cette idée dans les esprits mathématiques, que nous pensons qu'elles ne seront pas entièrement dépourvues d'utilité pour les progrès futurs de la science.

Il importe d'ailleurs de remarquer que ce n'est pas seulement en géométrie, mais encore dans la pratique arithmétique, que nous réalisons tous les jours et, pour ainsi dire, sans nous en douter, le passage du réel à l'imaginaire. Lorsqu'en effet une quantité e est très-petite par rapport à d'autres qui concourent avec elle dans la solution d'une question, nous n'hésitons pas un instant à ne tenir aucun compte des puissances de cette quantité supérieures à la première.

Cela posé, supposons que, dans une question à résoudre, l'inconnue x dépende de deux variables z et y d'après la condition suivante $x = zy$ et que, par des calculs ultérieurs, on ait trouvé

$$zy = a^2 + e^2;$$

on n'hésitera pas dans la pratique à dire que a^2 est la valeur de x; si, d'un autre côté, on a trouvé

$$zy = a^2 - e^2,$$

on acceptera encore a^2 comme valeur de x. Cependant, dans le premier cas, les valeurs générales de z et de y sont imaginaires et peuvent être représentées par

$$z = m\left(a + e\sqrt{-1}\right), \qquad y = \frac{a - e\sqrt{-1}}{m},$$

et dans le second elles sont réelles et représentées par

$$z = m(a + e), \qquad y = \frac{a - e}{m};$$

d'où l'on voit que, négliger e^2, c'est par le fait, et eu égard toujours au degré d'approximation qu'on s'est imposé, considérer comme équivalentes des expressions imaginaires et des expressions réelles.

En résumé, lorsque e est très-petit par rapport à a, on approche tout autant de la vérité en prenant $a \pm e\sqrt{-1}$ qu'en prenant $a \pm e$ et en leur substituant simplement a. C'est ce que la théorie explicative de la forme imaginaire démontre parfaitement et sans beaucoup de peine. Les remarques précédentes n'ont pas à coup sûr toute la portée d'une démonstration mathématique, mais elles sont du moins de nature à montrer que ce fait concorde très-exactement avec nos habitudes pratiques, et à ce point de vue elles me paraissent très-propres à apporter quelque clarté dans la question de doctrine qui vous a frappé et que vous avez signalée à l'attention des géomètres (*).

Permettez-moi enfin, Monsieur, de vous présenter une considération qui serre encore de plus près la question.

Supposons qu'on prenne un point A sur une droite indéfinie et qu'on dise d'un autre point qu'il est situé sur cette même droite à une distance a du premier, mais avec cette condition que l'évaluation de la distance n'est qu'approchée, et on sait qu'elle peut différer en plus ou en moins de la véritable, de la quantité e.

Il suit de là qu'ayant pris sur la droite un point B tel que $AB = a$, et ayant, à droite et à gauche de B, porté $BC = BC' = e$, on sera assuré que l'extrémité de la véritable longueur devra tomber en un point quelconque de la distance CC'. Mais il est évident qu'au point de vue géométrique, ceci correspond à l'indétermination la plus simple dans laquelle on puisse se trouver relativement à la position du point qui nous occupe. Une indétermination beaucoup plus grande serait celle dans laquelle on dirait que ce point doit se trouver à une distance E de B, comptée non-seulement dans le sens de la ligne AB, mais encore dans toutes les directions rayonnant autour du point B dans le plan de la figure.

Dans ce cas, ayant décrit, avec E pour rayon et du point B comme centre, une circonférence, l'extrémité de la ligne résolvant le problème devrait se trouver en l'un quelconque des points de l'espace que cette circonférence circonscrit.

Or à cette nouvelle indétermination dans la position du

(*) Il y a des questions où il s'agit de chercher non pas précisément la valeur de telle quantité, mais de savoir si elle peut exister ou non. Alors il faut que la réalité ou l'imaginarité soient établies avec *certitude* et non approximativement; et la difficulté des *coefficients approchés* reste dans son entier. TM.

point, indétermination que j'appellerais volontiers à deux dimensions, correspondent aussi deux éléments d'incertitude pour le résultat qu'on veut réaliser; car non-seulement ce qui concerne la longueur de la droite manquera de précision, mais il en sera de même pour sa direction qui, au lieu d'être fixe et unique comme dans le cas précédent, pourra être indistinctement une quelconque de celles comprises dans l'angle que forment les deux tangentes menées du point A au petit cercle, images physiques du degré et de la nature de l'approximation introduite dans la question.

On est ainsi invinciblement conduit à reconnaître que dans ce cas il faudra, eu égard au degré et à la nature de cette approximation, accepter comme solution du problème une droite dont non-seulement la longueur ne sera pas certaine, mais dont la direction sera elle-même indécise; d'ailleurs, ainsi que ce doit être le propre de toute approximation, l'erreur sera d'autant moindre pour chacun de ces éléments, que la quantité E sera plus petite par rapport à a, puisque, d'une part, le rapport $\frac{a+e}{a}$ de la véritable longueur à celle approchée, et que, d'autre part, la limite des variations des angles se rapprochent d'autant plus, le premier de l'unité, la seconde de zéro, que E est plus petit.

Si maintenant il arrivait que toutes les solutions géométriques approchées qui correspondent à des droites situées en dehors de la ligne AB pussent être algébriquement représentées au point de vue complexe de leur longueur et de leur direction par la forme imaginaire

$$a + b\sqrt{-1},$$

tandis que celles qui restent sur la ligne AB le sont par du réel, il est évident que le rapprochement des unes et des autres, rapprochement que la figure ci-jointe rend si frappant en Géométrie, et, par suite, l'équivalence du réel et de l'imaginaire, subordonnée d'ailleurs au degré d'approximation adopté, présenterait l'accord le plus complet, le plus satisfaisant, entre la pratique et la théorie.

Là est le véritable nœud qu'il faut délier pour débarrasser la question de toutes ses entraves. Admettez ce principe théorique de l'interprétation des formes imaginaires, supposez que la forme $a + b\sqrt{-1}$ est en effet la représentation analytique des deux éléments de la droite, longueur et direction, combinés ensemble et qui, désormais, marcheraient ainsi associés en Algèbre, comme ils le font en Géométrie, et non-seulement toutes les difficultés disparaissent, mais vous arrivez à une admirable concordance entre les faits analytiques et les faits d'application. Or ce principe, ainsi que je crois l'avoir démontré dans l'ouvrage cité, est précisément la conséquence la plus nécessaire de l'interprétation que j'ai donnée de l'expression $\sqrt{-1}$. Mais, par les raisons ci-dessus développées, je dois m'abstenir d'entrer plus avant dans les détails d'un point d'analyse qui, selon toute apparence, n'a pas encore été admis au droit de bourgeoisie dans le domaine des discussions mathématiques.

F. Vallès,
Ingenieur en chef des Ponts et Chaussees,
a Laon (Aisne)

Note du rédacteur. Homère applique à Jupiter l'épithète Νεφεληγερέτης, assembleur de nuages. Ce Jupiter n'est pas le dieu des géomètres. Cette théorie des imaginaires, quant aux *directions*, encore fort nébuleuse, ne semble consister que dans le théorème de Cotes et dans un théorème de statique, *mnémonisés :*

$$R^2 = (P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1});$$

P et Q peuvent représenter des forces rectangulaires et R la résultante. Cette exégèse n'a pas, que je sache, fait découvrir des vérités nouvelles. Dût-on y parvenir, on ne les admettra que lorsqu'elles seront contrôlées par une autre voie. Du reste, il ne faut rien repousser systématiquement et surtout les idées qui préoccupent des esprits distingués. *Omnia autem probate: quod bonum est tenete* (Thessal. V, 21).

M. Cauchy a essayé de présenter cette théorie sous une autre forme sous le nom de *quantités géométriques*, mettant à profit les idées de M. Saint-Venant sur les sommes géométriques (*Comptes rendus*, tome XXIX, p. 250), idées reproduites par M. Bellavitis sous le nom d'*équipollences*. Il me semble que c'est toujours de la statique *parlée*. Du reste nous avons là-dessus un travail de M. de Polignac, officier d'artillerie, maintenant en Crimée. Nous nous proposons de le publier, *Deo volente*, en 1855.

DÉTERMINANTS; correction essentielle.

Le théorème VI (t. XI, p. 437) n'est vrai que pour les puissances des déterminants symétriques et non pour des produits quelconques. *Lisez* $\lambda_1^3 \lambda_2^3$ *au lieu de* $\lambda_1^3 + \lambda_2^3$ (p. 440).

Dans le Mémoire de Jacobi (t. X, p. 258), il s'est glissé plusieurs fautes d'accentuation que le lecteur corrigera facilement.
