Nouvelles annales de mathématiques

Charles Méray

# Théorie géométrique de la parabole

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 13 (1854), p. 41-59
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__41_1>

# THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA PARABOLE (*);

PAR M. CHARLES MÉRAY,
Élève du lycée Saint-Louis (institution Barbet).

---

*Définitions.*

J'appelle *conique* le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. *Une telle courbe est toujours rencontrée par une droite en deux points (réels ou imaginaires).* Car ces points sont les points de deux divisions homographiques, tracées sur cette droite par les faisceaux générateurs. Il s'ensuit que *si autour de deux points quelconques d'une conique, on fait tourner deux droites mobiles se coupant sur la courbe, les faisceaux ainsi formés autour des points fixes seront homographiques.* Car à un rayon de l'un correspond toujours un seul rayon de l'autre, ce qui est le caractère *essentiel* des faisceaux homographiques.

PROBLÈME. *Construire la tangente en un point donné de la courbe formée par les faisceaux* $o$, $o'$.

Soient $m$ le point donné, et $m'$ le point infiniment voisin; $mm'$ est la tangente demandée : la droite $\overline{om\; o'm'}$ ; $\overline{om'.o'm}$ passe par $\omega$, point d'intersection des rayons qui, dans chaque faisceau, correspondent à la droite $oo'$ considérée comme étant un rayon de l'autre; rayons que la théorie

---

(*) Ce qui est entre guillemets ne se trouvait pas dans la composition présentée au grand concours de 1853 (*voir* t. XII, p. 314).

des faisceaux homographiques apprend à construire (*Géométrie supérieure*, nos 111 et 114) ; de plus, dans le quadrilatère $omo'm'$, la diagonale $oo'$ est coupée harmoniquement par les deux autres qui sont $mm'$ et $\overline{om'}\,\overline{o'm'}$ ; $\overline{om'\,o'm}$ ; donc, pour avoir la tangente demandée, menez $m\omega$ et prenez la conjuguée harmonique de cette droite par rapport à $mo$ et $mo'$. On voit, par ce qui précède, que les droites $o\omega$, $o'\omega$, sont les tangentes à la courbe aux points $o$, $o'$.

Soient O, O′ ces tangentes, M la tangente à la courbe au point $m$ ; $a$, $a'$ ses points d'intersection respectivement avec O et O′ ; $\alpha$, $\alpha'$ les traces des rayons $om$, $o'm$ respectivement sur O et O′. Les quatre points $\alpha$, $a$, $o$, $\omega$ sont en rapport harmonique : on a donc l'équation

$$\frac{oa}{o\omega} : \frac{\alpha a}{\alpha\omega} = -1,$$

ou bien

$$oa \, . \, \omega\alpha - o\omega \, . \, \alpha a = 0 ;$$

les points mobiles $\alpha$, $a$ divisent donc homographiquement la droite O [*Géométrie supérieure*, n° 161, équ. (2)] ; il en est de même pour les points $\alpha'$, $a'$ relativement à la droite O′ ; mais les points $\alpha$, $\alpha'$ appartiennent évidemment à deux divisions homographiques formées sur les droites O, O′, par les faisceaux $o$, $o'$ : donc les points $a$, $a'$ divisent homographiquement les droites O, O′ ; par conséquent : *toute conique est l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques*. Donc, d'*un point quelconque* $\lambda$ *on ne peut mener que deux tangentes* (*réelles ou imaginaires*) *à une conique*. Ces tangentes sont les rayons doubles des faisceaux homographiques $\lambda a$, $\lambda a'$. La réciproque de ce théorème se démontrerait aisément, par des raisonnements tout à fait corrélatifs à ceux-ci. Il n'y aurait qu'à remplacer, dans la démonstration précédente, les points par des droites, et réciproquement.

Je pourrai donc, dans ce qui suit, prendre aussi pour définition des coniques cette dernière propriété.

Les coniques se partagent en trois genres bien différents par la considération de leurs points situés à l'infini.

Je suppose que l'on transporte un des faisceaux générateurs parallèlement à lui-même, de manière que son centre coïncide avec celui de l'autre. Il peut se présenter trois cas : les rayons doubles peuvent être réels et différents, imaginaires, coïncidents. Dans le premier cas, les points de la courbe situés à l'infini sont réels et différents, la courbe a deux asymptotes réelles parallèles aux rayons doubles, c'est une *hyperbole*; dans le second cas, les points à l'infini sont imaginaires, la courbe est une *ellipse*; enfin, dans le troisième cas, les points à l'infini coïncident et la courbe est une *parabole*. On voit par là que la parabole est tangente à la droite de l'infini. Puisque la droite de l'infini est une des tangentes de la parabole, *les divisions homographiques, tracées sur deux tangentes fixes par une tangente mobile, sont semblables*, car, dans ces divisions, les points à l'infini, dans chaque division, sont homologues (*Géométrie supérieure,* n° 125). La réciproque est évidente.

Si l'on transporte, où on le voudra, dans le plan et parallèlement à eux-mêmes les faisceaux générateurs $o$, $o'$, la conique correspondante restera toujours homothétique à elle-même, et l'on peut remarquer que l'angle des rayons doubles des faisceaux dont les centres coïncident et dont j'ai parlé plus haut, n'a pas changé, et que réciproquement si cet angle est constant dans le mouvement, la forme de la conique ne change pas. Donc : *deux hyperboles qui ont même angle asymptotique sont sem-*

*blables*; et, par suite, *deux paraboles quelconques sont semblables,* puisque, dans ce cas, cet angle est toujours nul. Je ferai remarquer que chaque couple de ces rayons doubles forme une conique semblable à une des coniques engendrées par les faisceaux $o$, $o'$.

*Équation générale de ces courbes en coordonnées rectangles.*

« Une des équations qui expriment l'homographie des » faisceaux $o$ et $o'$ est, comme on le sait,

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')} \quad (\textit{Géométrie supérieure}, \text{ n}^{\text{o}}\ \mathbf{145}.)$$

» A, B, M sont dans le faisceau $o$ les homologues respec» tifs de A', B', M', dans le faisceau $o'$, et $\lambda$ est une con» stante quelconque. Je prends pour axes une parallèle et » une perpendiculaire à $oo'$; si $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\mu$, $\mu'$, sont » les angles que font, avec l'axe des $x$, ($oo'$), A, B, A', » B', M, M', l'équation précédente s'écrira

$$\frac{\sin(\mu - \alpha)}{\sin(\mu - \beta)} = \lambda \frac{\sin(\mu' - \alpha')}{\sin(\mu' - \beta')},$$

» ou, si l'on désigne par $(a, b)$, $(a', b)$, $(x, y)$, les coor» données des points $o$, $o'$, $m$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos\alpha \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}} - \sin\alpha \dfrac{(x-a)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}}{\cos\beta \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}} - \sin\beta \dfrac{(x-a)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}}\\ -\lambda\,&\frac{\cos\alpha' \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}} - \sin\alpha' \dfrac{(x-a')}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}}}{\cos\beta' \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}} - \sin\beta' \dfrac{(x-a')}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}}}\end{aligned}\right\} = 0.$$

» Cette équation est toujours du second degré, ce » qu'on pouvait prévoir, car la courbe est toujours coupée » par une droite en deux points. Nous verrons plus bas » comment elle se simplifie, par un choix convenable » d'axes. On voit de suite, par cette équation, que si la » conique se réduit à deux droites, la fonction du pre- » mier membre se décomposera en facteurs du premier » degré. Il n'y a qu'à prendre dans l'équation précédente » $oo'$ pour A et A'. Réciproquement, *toute courbe du se- » cond degré est une conique*, car j'ai démontré plus » haut qu'une courbe jouissant de la propriété d'être tou- » jours coupée par une droite en deux points en était une. »

Les belles propriétés des quadrilatères et hexagones inscrits ou circonscrits à des coniques, sont trop connues pour qu'il soit besoin d'en parler ici, je les admettrai donc; du reste, ces propriétés découlent immédiatement des définitions précédentes.

*Théorie des pôles et des polaires.*

Problème. *On donne une conique* $\Sigma$ *et un point* $\lambda$ *dans le plan, par ce point on mène une droite quelconque* $\Lambda$; *soient* $\varepsilon$, $\varphi$ *les points* (*réels, imaginaires*) *de la conique situés sur* $\Lambda$, *et* $\lambda'$ *le conjugué harmonique de* $\lambda$ *par rapport à* $\varepsilon$, $\varphi$; *on demande le lieu de* $\lambda'$ *quand on fait mouvoir* $\Lambda$ *autour de* $\lambda$.

Soient $o$, $o'$ les faisceaux générateurs; les rayons homologues M, M' de ces faisceaux tracent sur $\Lambda$ deux divisions homographiques dont les points doubles sont $\varepsilon$ et $\varphi$; mais (*Géométrie supérieure*, n° 267) quand deux divisions homographiques sont formées sur une même droite, le conjugué harmonique d'un point de la droite par rapport aux points doubles est le même que le conjugué harmonique du même point par rapport à ses deux homologues, quand on le considère comme appartenant successivement aux deux divisions; or le lieu de ces points homologues se compose actuellement de deux droites, qui sont dans le second et le premier faisceau les homologues de $o\,\lambda$, $o'\,\lambda$, considérées comme appartenant au premier et au second : donc *le lieu demandé est la polaire du point* $\lambda$ *par rapport à ces droites.* Cette droite est appelée la *polaire* du point $\lambda$ par rapport à la conique $\Sigma$. On conclut facilement de ce raisonnement, que *dans tout quadrilatère inscrit à une conique, chaque diagonale est la polaire du point d'intersection des deux autres diagonales.* Si l'on considère une conique comme l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques, on verra par un raisonnement corrélatif au précédent, que *si l'on a une conique* $\Sigma$ *et une droite* $\Lambda$, *et que de chacun de ses points on mène deux tangentes* E, $\Phi$ *à la courbe* $\Sigma$, *l'enveloppe de la conjuguée harmonique* $\Lambda'$ *de* $\Lambda$ *par rapport à* E, $\Phi$ *est un certain point fixe.* Ce point est appelé le *pôle* de la droite $\Lambda$. Ce raisonnement ferait voir facilement que *dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, le pôle d'une diagonale est le point d'intersection des deux autres diagonales.* Remarquons aussi que *la polaire d'un point est la droite qui joint les points de contact des tangentes à la courbe issues de ce point,* et que *le pôle d'une droite est le point de concours des tangentes menées aux points d'intersection de la droite et de la courbe.* Cela posé, il est visible qu'*une droite* $\Lambda$ *est la polaire de son pôle* $\lambda$.

*La polaire* $\Lambda$ *d'un point* $\lambda$ *contient le pôle* $\pi$ *d'une droite quelconque* $\Pi$ *qui passe par le point* $\lambda$; car, soient $\varepsilon$, $\varphi$ les points d'intersection de la conique avec $\Lambda$, le conjugué harmonique $\pi$ de $\overline{\Lambda\Pi}$, par rapport à $\varepsilon$ et $\varphi$, jouit de la propriété de diviser harmoniquement, conjointement avec la conique et la droite $\Pi$, deux droites qui sont $\Lambda$ et

$\pi\lambda$. Donc, *si un point décrit une droite, sa polaire, par rapport à une conique fixe, enveloppe un point, et réciproquement.* « On aurait pu parvenir par une autre voie » également simple, aux propriétés des pôles et des po- » laires ; car soient un point $\lambda$, les tangentes E, $\Phi$ issues » de ce point à une conique, $\varepsilon$, $\varphi$ leurs points de contact, » et $\Lambda$ la corde de contact : le triangle $\lambda\varepsilon\varphi$ est un véritable » quadrilatère inscrit à la conique, deux côtés coïncident » sur $\Lambda$ ; donc, en vertu du théorème de Desargues, une » sécante M coupe la conique et le quadrilatère en six » points en involution ; deux points conjugués coïncident » sur $\Lambda$, et si la sécante passe par le point $\lambda$, deux autres » points conjugués coïncideront avec $\lambda$. Ces points sont » donc les points doubles de l'involution ; par suite, ils » sont conjugués harmoniques par rapport aux points » d'intersection de la sécante avec la conique. On démon- » trerait tout aussi facilement la seconde propriété, en » considérant le triangle $\mathrm{E}\Phi\Lambda$ comme un quadrilatère » circonscrit. Mais ces solutions ont l'inconvénient d'être » moins directes que les précédentes ; on n'en peut pas » tirer immédiatement les propriétés des quadrilatères » inscrits et circonscrits ,trouvées plus haut. »

Deux points sont dits *conjugués* quand la polaire de l'un passe par l'autre, et deux droites sont dites *conjuguées* quand le pôle de l'une est situé sur l'autre. Si l'on conçoit tous les couples de points conjugués situés sur une droite A, ces points forment deux divisions homographiques en involution, dont les points doubles sont les points d'intersection de la conique avec la droite A. Si, de même, on conçoit tous les couples de droites conjuguées passant par un point *a*, ces droites formeront autour du point deux faisceaux homographiques en involution, et les rayons doubles seront les tangentes à la conique issues du point *a*. Quand on a deux faisceaux homographiques en involution, il existe toujours un système de deux rayons conjugués rectangulaires; et s'il y en a plus d'un, tous les rayons sont respectivement perpendiculaires à leurs conjugués (*Géométrie supérieure*, n$^{os}$ 249 et 250). Donc, *en chaque point du plan d'une conique il y a un système de deux droites conjuguées rectangulaires.* Je parlerai plus bas des points remarquables autour desquels une droite quelconque est perpendiculaire à sa conjuguée.

*Du centre et des diamètres.*

Si l'on considère le point dont la polaire est à l'infini (ce point existe toujours, car une droite n'a qu'un pôle, et, par conséquent, ce pôle ne peut pas être imaginaire), on voit facilement que, *dans l'ellipse ou l'hyperbole, ce point n'est pas à l'infini*, car ces courbes ne sont pas tangentes à la droite de l'infini; qu'*il est le milieu de toutes les cordes qui y passent,* c'est-à-dire le *centre* de la courbe; que *le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une droite qui passe par le centre,* c'est-à-dire que dans ces courbes *tous les diamètres sont des droites*. On voit de plus que, *dans l'hyperbole, les asymptotes passent par le centre.* Deux droites conjuguées passant par le centre jouissent évidemment de cette propriété, que l'une divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre, et réciproquement : ce sont des *diamètres conjugués.* Il suit de là que *les ellipses et les hyperboles ont toujours deux axes de symétrie :* ce sont les droites conjuguées rectangulaires qui passent par le centre.

Dans la parabole, *aucun point de son plan ne peut être considéré comme en étant le centre,* car si ce point existe, il sera évidemment le pôle de la droite de l'infini; et comme ce pôle est situé sur la courbe (puisque la parabole est tangente à la droite de l'infini), il ne peut être le milieu des cordes qui y passent. Il est donc inexact de dire que la parabole a un centre à l'infini, car cela reviendrait à dire que certaines droites coupent cette courbe en trois points (*). Tous les diamètres de la parabole sont des droites qui passent par le point de contact de la courbe et de la droite de l'infini, et cette courbe n'a qu'une axe de symétrie.

Quand on a deux faisceaux homographiques en involution, il existe les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &1^o.\ \frac{\sin(E, M)}{\sin(F, M)} = -\frac{\sin(E, M')}{\sin(F, M')};\\ &2^o.\ \frac{\sin(A, M)\sin(A, M')}{\sin(A', M)\sin(A', M')} = \text{const.};\\ &3^o.\ \text{tang}(O, M).\text{tang}(O, M') = \text{const.} \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\textit{Géométrie supérieure},\\ \text{n}^o\ \mathbf{252}.\end{array}$$

Dans la première équation, E, F sont les rayons doubles, M, M' deux rayons conjugués quelconques; dans la deuxième, (A, A'), (M, M') sont deux couples quelconques de rayons conjugués; dans la troisième, O est un rayon perpendiculaire à son conjugué, et (M, M') un couple quelconque de rayons conjugués. Donc, puisque dans les ellipses et les hyperboles, les diamètres conjugués forment deux faisceaux en involution, ces trois équations seront autant de propriétés de ces diamètres. Les deux dernières fournissent la relation connue qui existe entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, à savoir

$$mm' = \text{const.}$$

La dernière se rapporte au cas où les axes de coordonnées seraient les axes mêmes de la courbe. Dans le cas de l'hy-

(*) Nous n'admettons pas cette assertion, le mot *centre* n'a pas ici la signification ordinaire. TM.

perbole, les rayons doubles des faisceaux en involution formés par les diamètres conjugués sont les asymptotes; et si l'on rapporte la courbe à ces droites, l'équation 1° fournira, entre les coefficients angulaires $m$, $m'$ de deux diamètres conjugués, la relation aussi connue

$$m + m' = 0.$$

Si dans l'ellipse ou l'hyperbole on joint un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre, ces droites seront parallèles à deux diamètres conjugués; il existera donc, entre les angles que font ces droites avec le diamètre fixe et son conjugué, les relations (1); et si l'on exprime dans 2° ou 3° les rapports de sinus au moyen des coordonnées du point, on aura l'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués ou aux axes; on trouvera ainsi

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1.$$

M et N sont de mêmes signes si la constante est négative, et de signes contraires si elle est positive. Pour la parabole, des considérations analogues donneraient

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y}{\infty} = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{y'}{\infty},$$

$(x, y)$, $(x', y')$ étant deux points de la courbe rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité, ou bien

$$y^2 = Kx.$$

*Propriétés des points tels que, autour de l'un d'eux, une droite quelconque est perpendiculaire à sa conjuguée.*

Soient une conique $\Sigma$ et un quadrilatère circonscrit, dont les couples de sommets opposés sont $a$, $a'$; $b$, $b'$; $c$, $c'$; menons d'un point $\alpha$ les droites $\alpha a$, $\alpha a'$, $\alpha b$, $\alpha b'$, $\alpha c$, $\alpha c'$, et les tangentes M, M′ à la courbe; si l'on prend les deux droites E, Φ, qui sont conjuguées harmoniques à la fois, relativement à $\alpha a$, $\alpha a'$ et M, M′, elles le seront aussi par rapport à $\alpha b$, $\alpha b'$ et $\alpha c$, $\alpha c'$, puisque, en vertu d'un théorème connu (le théorème corrélatif de celui de Desargues), trois quelconques des couples $\alpha a$, $\alpha a'$; $\alpha b$, $\alpha b'$; $\alpha c$, $\alpha c'$; M, M′ sont en involution; par conséquent, si on prend les points d'intersection $\varepsilon$, $\varphi$ de E, Φ, avec une diagonale quelconque, $bb'$ par exemple, et qu'on fasse varier le point $\alpha$, les points tels que $\varepsilon$, $\varphi$ formeront sur cette droite deux divisions homographiques en involution, dont les points doubles sont $b$ et $b'$. On peut donc affirmer que *si, pour chaque point $\alpha$ du plan, il existe deux droites conjuguées telles, que leurs points d'intersection avec une droite fixe forment deux divisions homographiques en involution, ces droites jouiront de la même propriété relativement à chacune des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à la conique, dont deux sommets opposés sont les points doubles de ces divisions en involution;* et l'on peut observer que les points doubles des divisions en involution formées sur ces dernières droites, sont les sommets du quadrilatère.

Si en chaque point du plan d'une conique, on conçoit les droites conjuguées rectangulaires qui y passent, ces droites forment, sur la droite de l'infini, deux divisions en involution. Soient $p$, $q$ les points doubles; si de ces points on mène des tangentes à la conique, on formera un quadrilatère qui, en vertu du théorème précédent, jouira de la propriété, que les deux autres diagonales seront divisées en involution par les droites conjuguées rectangulaires. Comme, dans tout quadrilatère circonscrit, le point d'intersection de deux diagonales est le pôle de la troisième, et que, dans tout quadrilatère, le segment compris entre deux sommets opposés est divisé harmoniquement par les deux autres diagonales, *les deux droites qui, conjointement avec la droite de l'infini, jouiront de la propriété d'être divisées en involution par les droites conjuguées rectangulaires, seront les axes de la conique, et sur chaque axe, les points doubles seront de part et d'autre du centre et à égales distances.* Je désignerai ces points par $f, f_1; f', f'_1$.

Étant donnée une droite, il y en a toujours une autre, et une seule, qui jouit de la propriété d'être à la fois conjuguée et perpendiculaire à la proposée; car cette seconde droite s'obtient en prenant le pôle de la première, et en abaissant de ce point une perpendiculaire sur cette dernière droite. Si donc $a$, $a_1$ sont les points d'intersection d'une droite A avec les axes d'une conique; $a'$, $a'_1$ les conjuguées de ces points respectivement par rapport à $ff_1$, $f'f'_1$; la droite A', qui passe par $a'$, $a'_1$, est conjuguée et perpendiculaire à A; car, soient $\alpha$, $\alpha'$ le point d'intersection de A avec la droite de l'infini et son conjugué par rapport aux points que j'ai appelés $p$, $q$; les trois points $a'$, $a'_1$, $\alpha'$ sont en ligne droite (*Géométrie supérieure*, n° 349); ce qui prouve d'abord que A, A' sont rectangulaires, puisque ces droites passent respectivement par $\alpha$, $\alpha'$, et ensuite qu'elles sont conjuguées, puisque la conjuguée de A jouit de la propriété de passer par $a'$ et $a'_1$. Si l'on faisait la perspective, on retomberait sur cette propriété connue, que « *si l'on a un quadrilatère $mm'nn'$ circonscrit à une conique et une droite* A, *le pôle de cette droite et les points conjugués harmoniques de* $\overline{A}, \overline{mm'}$, $\overline{A}, \overline{nn'}$, *respectivement par rapport à $m$, $m'$ et $n$, $n'$, sont en ligne droite,* ou que *le lieu des pôles d'une droite par rapport à toutes les coniques inscrites dans le même quadrilatère est une droite.* » Il suit de là que *si l'on prend sur un axe deux points $a$, $a'$ conjugués harmoniques par rapport aux* *points $f$, $f_1$ qui s'y trouvent, un point quelconque de la circonférence décrite sur $aa'$ comme diamètre, jouira de la propriété que, si on le joint à $a$ et $a'$, on aura deux droites conjuguées rectangulaires:* donc, *relativement à l'un quelconque des points désignés par $f$, $f_1$, $f'$, $f'_1$, deux droites conjuguées sont rectangulaires,* puisqu'on peut considérer ces points comme étant des cercles infiniment petits. Ces points remarquables sont appelés les *foyers* de la conique. Il est évident, par ce qui précède, qu'il n'y en a que quatre, et que deux sont réels et deux imaginaires.

Si deux faisceaux en involution sont formés par un angle droit tournant autour de son sommet, leurs rayons doubles font, avec une droite quelconque, des angles dont les tangentes sont $+i$, $-i$ (*Géométrie supérieure,* n° 181). Cette propriété appartient donc aux tangentes à une conique issues de l'un de ses foyers.

Si donc $\alpha$, $\beta$ sont les coordonnées d'un foyer d'une conique, les tangentes issues de ce point auront pour équations (les axes étant rectangulaires)

$$(x-\alpha)+(y-\beta)i=0,$$
$$(x-\alpha)-(y-\beta)i=0;$$

l'équation de la conique sera donc de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\lambda X^2=0,$$

$X=0$ étant l'équation de la corde des contacts.

Cette propriété remarquable dont jouissent les tangentes à une conique issues de l'un de ses foyers, de faire avec une droite quelconque des angles dont les tangentes sont $+i$ et $-i$, peut servir à déterminer les foyers. Pour cela, il faut chercher l'intersection des axes avec les tangentes, ce qui est facile; car, si l'on prend deux tangentes A, A' symétriques par rapport à un axe, une tangente mobile tracera sur elles deux divisions homographiques qui pourront s'exprimer au moyen d'une équation très-simple; une seconde équation sera fournie par la condition que les tangentes en question font avec la droite A, par exemple, un angle égal à *arc tang i*; les positions des tangentes qui passent par les foyers seront donc bien déterminées par ces deux équations, et en prenant leurs intersections avec l'axe, on aura les foyers; de même pour l'autre axe. On trouve ainsi que, dans l'ellipse et l'hyperbole, les foyers ne sont pas à l'infini, et que dans la parabole, il n'y a qu'un foyer réel non à l'infini.

*Si d'un point a on mène à une conique deux tangentes* M, M', *et des droites à deux foyers conjugués quelconques*, $f$, $f'$ *par exemple, les angles* (M, M'), ($af$, $af_1$) *ont même bissectrice*. Car, si on joint le point $a$ aux points $p$, $q$, ces deux droites et les quatre autres forment un faisceau en involution; mais les angles ($ap$, $aq$), (M, M') ont évidemment même bissectrice; il en est donc de même des angles ($af$, $af_1$), (M, M') (*Géométrie supérieure*, n° 247). Il suit de là que *la tangente est également inclinée sur les droites qui joignent le point de contact à deux foyers conjugués*. On en déduit immédiatement que

$$af + af_1 = \text{const.}$$

($a$ étant un point de la courbe).

*Le produit des perpendiculaires abaissées de deux foyers conjugués sur une tangente quelconque est constant.* En effet, le produit des distances des points $p$, $q$ à cette droite est constant, puisqu'il est proportionnel au produit des tangentes des angles que fait la tangente proposée avec les droites qui joignent le point de contact aux points $p$, $q$; et dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, on sait que le produit des distances d'une tangente à deux sommets opposés est au produit des distances de cette même droite à deux autres sommets opposés, dans un rapport constant.

La propriété que possèdent toutes les coniques confocales d'être tangentes à deux mêmes droites, rend évidente cette proposition, que, *quand on fait tourner autour de son sommet un angle de grandeur constante, les rayons doubles des faisceaux homographiques formés par ses côtés sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de l'angle.* Car, soient une conique $\Sigma$; $f$ un de ses foyers réels, et $(A, A')$ un angle dont le sommet est en $f$; si on fait tourner tout le système autour du foyer et d'un angle quelconque, le rapport anharmonique de $A$, $A'$ et des deux tangentes à la conique ne changera évidemment pas, et les équations de ces dernières droites resteront toujours les mêmes. Le théorème est donc démontré.

Nous avons vu plus haut que toute conique a au moins un foyer réel non à l'infini; il suit de là que *toute conique peut être placée sur un cône à base circulaire.* Car, soient $f$ le foyer de la conique proposée, F sa polaire; que l'on mène par le foyer un plan perpendiculaire à F, et que, dans ce plan, on décrive un cercle dont le centre soit le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur sa polaire, et le rayon la longueur de cette perpendiculaire: d'un point quelconque $\omega$ de ce cercle, on verra sous un angle droit le segment compris entre deux points conjugués situés sur $p$; si on fait la perspective sur un plan parallèle à celui qui passe par $\omega$ et F, la courbe obtenue ainsi sera une conique, et comme toutes les droites conjuguées passant par son centre sont rectangulaires, ce sera un cercle.

Il résulte immédiatement de l'équation aux foyers obtenue précédemment, que *la distance d'un point d'une conique à un foyer est une fonction rationnelle, entière* *et du premier degré des coordonnées de ce point,* et que *le rapport de cette distance du même point à la polaire du foyer est le même pour tous les points de la courbe.*

Cette dernière propriété peut se démontrer autrement, et pour cela établissons deux lemmes préliminaires.

« 1°. *Si l'on mène à une conique des tangentes aux » extrémités d'un axe, elles intercepteront sur une tan- » gente quelconque un segment qui sera vu d'un foyer » situé sous un angle droit.* En effet, soient A, A', $a$, $a'$, » M, $m'$, $f$, F les tangentes aux extrémités d'un axe, » leurs points de contact, la tangente mobile, son point » de contact, le foyer, sa polaire; le faisceau obtenu en » joignant le foyer $f$ aux points $a$, $\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $m$, $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{F}}$ est har- » monique, et les deux droites $f\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $f\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{F}}$ sont rectan- » gulaires comme conjuguées relatives aux foyers; donc » $f\overline{\mathrm{AM}}$ est bissectrice de l'angle $(fa, fm)$; de même » $f\overline{\mathrm{A'M}}$ est bissectrice de l'angle $(fa', fm)$ : le théorème » est donc démontré, puisque les deux angles sont adja- » cents et supplémentaires. Ce théorème fait voir que, » *dans la parabole, le lieu de la projection du foyer sur » une tangente mobile est la tangente au sommet.*

» 2°. *Si on prend sur l'axe $aa'$ d'une conique un » point $\gamma$ et la polaire* $\Gamma$, *et qu'en $\gamma$ on élève sur $aa'$ une » perpendiculaire* G, *une tangente quelconque* M *cou- » pera* G *et* $\Gamma$ *en deux points* $\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $\overline{\Gamma}\,\overline{\mathrm{M}}$, *tels que l'on » aura*

$$\frac{f,\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{M}}}{f,\overline{\Gamma}\,\mathrm{M}} = \text{const.},$$

» *$f$ étant un foyer situé sur l'axe $aa'$.* En effet, le fais- » ceau $f\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $f\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $f$, $\overline{\mathrm{A'}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $f$, $\overline{\Gamma}\,\overline{\mathrm{M}}$ est harmonique; » mais l'angle des deux droites $f\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{M}}$, $f\overline{\mathrm{A'}}\,\overline{\mathrm{M}}$ est droit

» d'après le lemme précédent; donc $f\overline{A'}\,\overline{M}$ est bissec-
» trice de l'angle des deux droites $f\overline{M}\,\overline{G}$, $f\overline{M}\,\overline{\Gamma}$; par
» conséquent,

$$\frac{\overline{\overline{f\overline{M}\,\overline{G}}}}{\overline{\overline{f\overline{M}\,\overline{\Gamma}}}}=\frac{\overline{\overline{\overline{M}\,\overline{G},\,\overline{M}\,\overline{A'}}}}{\overline{\overline{\overline{M}\,\overline{\Gamma},\,\overline{M}\,\overline{A'}}}}=\frac{\gamma a'}{ga'}=\text{const.},$$

» $g$ étant le pied de la polaire sur l'axe.

» Cela posé, prenons le foyer $f$ pour le point $\gamma$, et
» abaissons du point $m$ une perpendiculaire $mp$ sur F;
» les deux triangles $fmp$, $\overline{f}\,\overline{GM}\,\overline{FM}$ sont semblables
» comme ayant les angles égaux, puisque le quadrilatère
» $fm\overline{MF}p$ est inscriptible, les angles $(fm, f\,\overline{MF})$,
» $(pm, F)$ étant droits; donc

$$\frac{mf}{mp}=\frac{a'f}{a'g};$$

» la polaire du foyer est donc la *directrice*. On voit faci-
» lement que, dans la parabole, ce rapport est égal à
» l'unité. »

PROBLÈME. — *Faire la perspective* S *d'une conique* $\Sigma$, *de telle sorte que les perspectives* $f$, $f_1$ *de deux points donnés* $\varphi$, $\varphi_1$ *dans le plan de* $\Sigma$, *soient les foyers de* S.

Construisons le quadrilatère circonscrit à la conique $\Sigma$, dont deux sommets opposés sont $\varphi$, $\varphi_1$; soient $\pi$, $\chi$, $\varphi'$, $\varphi'_1$ les deux autres sommets de côtés opposés; soient aussi $a$, $a'$ deux points conjugués harmoniques par rapport à $\pi$, $\chi$: il existe dans le plan $\Sigma$, deux points $\omega$, $\omega_1$, d'où l'on voit sous un angle droit tous les segments tels que $a$, $a'$. Que l'on décrive sur $\omega$, $\omega_1$ comme diamètre, et dans un plan perpendiculaire au plan $\Sigma$ une circonférence de cercle, tous ses points jouiront de la même propriété que $\omega$ et $\omega_1$; qu'on prenne un de ces points $o$, et qu'on fasse la perspective sur un plan parallèle au plan $o\pi\chi$, le problème sera résolu. On peut opérer de la même manière sur $\varphi', \varphi'_1$. On voit par ce qui précède que le problème est impossible, quand les tangentes menées de l'un des points $\pi$, $\chi$ à la conique sont réelles et ne coïncident pas; car, dans ce cas, $\omega$, $\omega_1$ sont imaginaires. On voit aussi qu'il y a deux systèmes de solutions (*).

« *Observation.* — Ce problème ne diffère pas de celui-» ci, résolu par M. Chasles : *Faire la perspective d'une* » *conique, de telle sorte qu'un point devienne un foyer* » *et qu'une droite passe à l'infini.* La droite en question » est $\pi\chi$. »

*Dans toute parabole, la sous-normale est constante.* Soient $n$ le pied de la normale au point $m$, $t$ celuide la tangente, $f$ le foyer, $a$ le sommet, $p$ le pied de la perpendiculaire abaissée de $m$ sur l'axe; $np$ est la sous-normale: les deux points $p$, $f$ forment sur l'axe deux divisions homographiques, puisqu'ils sont à égales distances du point $a$; mais les deux points $n$ et $f$ forment aussi deux divisions homographiques, puisqu'ils sont à égales distances du foyer; donc $n$ et $p$ forment aussi deux divisions homographiques : les points doubles de ces divisions coïncident évidemment et sont à l'infini; le théorème est donc démontré. (*Géométrie supérieure,* n° 169.)

*Les tangentes menées à la parabole d'un point de la directrice sont rectangulaires.* Soient $\alpha$, M, M', $m$, $m'$, F, $f$, A le point donné sur la directrice, les tangentes à la courbe menées de ce point, leurs points de contact, la directrice, le foyer et l'axe : la tangente M est sur $fm$ et sur l'axe; donc elle est la bissectrice de l'angle (F, $\alpha f$), puisque les côtés de cet angle sont respectivement perpendiculaires aux droites A et $fm$. Il en est de même pour M', relativement au supplémentaire de l'angle (F,$\alpha f$); donc, etc.

---

(*) Comment cette belle solution n'a-t-elle pas attiré l'attention des juges?

Je citerai encore une propriété remarquable des foyers. Soient deux tangentes O, O′ à une conique, et un point extérieur $\alpha$; si l'on mène une tangente mobile qui coupe O et O′ en $m$ et $m'$, les deux droites $\alpha m$, $\alpha m'$ forment deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les tangentes à la conique issues de $\alpha$; *donc, si* $\alpha$ *est un foyer, l'angle* $m\alpha m'$ *est constant.* Comme dans la parabole, les divisions formées sur les tangentes fixes sont semblables : l'angle constant $m\alpha m'$ est égal à l'angle formé par les tangentes fixes; donc *le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à la parabole passe au foyer.*

Cinq conditions sont nécessaires pour déterminer une conique (les centres $o$, $o'$ des faisceaux générateurs et trois points de la courbe); mais s'il s'agit d'une parabole, quatre suffisent; car on sait que la courbe est tangente à la droite de l'infini.

*Note du rédacteur.* — Cette pièce a été présentée au grand concours de 1853, et nous regrettons vivement qu'elle ait été écartée de prime abord comme ne rentrant pas dans les termes du programme. Cette composition a un tel cachet de supériorité, qu'elle méritait sinon le premier prix, au moins d'être couronnée hors rang.

Les prix d'honneur viennent enfin d'être *officiellement* publiés. On ne saurait trop applaudir à cette excellente détermination. La composition couronnée en Mathématiques supérieures représente une bonne leçon, fidèlement répétée, nettement rédigée et méritait une honorable distinction. Nos regrets n'en subsistent pas moins. Pourquoi n'avoir pas accordé *deux premiers prix?* et surtout pourquoi n'avoir pas accordé la plus légère approbation au milieu de *huit* accessits, à un travail du premier ordre; travail d'écolier, exécuté dans un temps *limité*, et qui ferait honneur à un professeur?

---