Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Solution de la question 205 (Strebor)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 372-377

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__372_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 205 (Strebor)

(voir t. VIII, p. 107);

Par M. FAURE,

Officier d'Artillerie.

Soient PT une courbe sphérique, O un point fixe sur la sphère, et PQ un grand cercle tangent à la courbe en P. Menons un grand cercle par O faisant, avec OP, un angle POR, complément de OPQ; abaissons de M, milieu de OP, un arc MN perpendiculaire à OR, et prenons le point R de manière que OR soit divisée en parties égales au point N. Le grand cercle RS tangent à la courbe, lieu de R, fera, avec OR, un angle ORS = OPQ (*voir* la figure dans les planches du tome VIII).

Démonstration géométrique. Si, du point M comme pôle avec un rayon sphérique égal à OM, on décrit un cercle, il passe par les points P et R. Ce cercle contient aussi le point infiniment voisin du point R de la courbe dont il s'agit. Le grand cercle RS est donc à la fois tangent à cette courbe et au cercle M. Le rayon MR étant perpendiculaire à ce grand cercle, on a

$$\mathrm{ORS} = 90^\circ - \mathrm{ORM} = 90^\circ - \mathrm{P\acute{O}R} = \mathrm{OPQ}.$$

Démonstration analytique. Prenons le point O pour pôle, un grand cercle quelconque passant par O pour axe polaire. Désignons par φ l'angle dont la tangente trigonométrique est $\sin r \frac{d\omega}{dr}$, et par φ_1 celui qui a pour tangente $\frac{\sin r_1\, d\omega_1}{dr_1}$, on aura aussi

$$\tang \varphi_1 = \frac{\tang \frac{1}{2} r_1\, d\omega_1}{d.\tang \frac{1}{2} r_1};$$

le triangle OMN donne

$$\tang \frac{1}{2} r_1 = \tang \frac{1}{2} r \sin \varphi,$$

d'où

$$d.\tang \frac{1}{2} r_1 = \frac{\sin r \cos \varphi\, d\varphi + \sin \varphi\, dr}{2 \cos^2 \frac{1}{2} r},$$

et

$$\tang \varphi_1 = \frac{\sin r . \tang \varphi\, d\omega_1}{\sin r\, d\varphi + \tang \varphi\, dr}.$$

Mais

$$\tang \varphi\, dr = \sin r\, d\omega,$$

donc

$$\tang \varphi_1 = \frac{\tang d\omega}{d\varphi + d\omega}:$$

mais

$$\omega_1 - \omega = \varphi - 90^\circ,$$

d'où résulte

$$d\varphi + d\omega = d\omega:$$

donc

$$\tang\varphi = \tang\varphi_1.$$

Remarque. En faisant dériver d'une courbe quelconque donnée une série de courbes se succédant d'après la loi indiquée, le théorème que l'on vient de citer fournit une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de la série. (STREBOR.)

Je désigne par r_n, ω_n les coordonnées polaires d'un point de la courbe qui occupe le $n^{\text{ième}}$ rang dans la série des courbes dérivées, et par s_n son arc. On a

$$ds_n = dr_n\sqrt{1 + \frac{\sin\omega_n^2\, d\omega_n^2}{dr_n^2}} = dr_n\sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega\, d\omega^2}{dr^2}}.$$

On trouve facilement, en passant d'une courbe à l'autre,

$$\tang\frac{1}{2}r_n = \tang\frac{1}{2}r\sin^n\varphi;$$

par suite

$$dr_n = \frac{\sin^{n-1}\varphi\left(\sin\varphi + n\sin r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\left(1 + \tang^2\frac{1}{2}r\sin^{2n}\varphi\right)}.$$

On peut déduire de là immédiatement

$$ds_n = \frac{\sin^{n-1}\varphi\left(\tang\varphi + n\sin r\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\left(1 + \tang^2\frac{1}{2}r\sin^{2n}\varphi\right)},$$

puisque $ds\cos\varphi = dr_n$.

Si l'on veut avoir l'expression de l'arc au moyen de ω et r, on différentie l'équation

$$\tang\varphi = \frac{\sin r\, d\omega}{dr},$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sin r\dfrac{d^2\omega}{dr^2} + \dfrac{d\omega}{dr}\cos r}{1 + \sin^2 r\dfrac{d\omega^2}{dr^2}},$$

et l'on élimine φ dans la valeur précédente de $d\delta_n$. On trouve

$$ds_n = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}r\,dr\left(\sin r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1}\left[n\sin r\frac{d\omega^2}{dr^2}+\sin^2 r\frac{d\omega^3}{dr^3}+(n\cos r+1)\frac{d\omega}{dr}\right],$$

et au lieu de prendre la courbe (ω, ρ) pour courbe primitive, on peut supposer qu'elle dérive elle-même d'une série d'autres courbes se succédant d'après la même loi. J'appelle $\omega_{-n}\,r_n$ les coordonnées du point de la courbe qui serait tel, qu'après n dérivations successives on obtienne le point ω, r de la première courbe. Soit aussi s_{-n} son arc, je vais faire voir que son expression peut se déduire de celle de s_n en changeant le signe de n, ce qui justifiera la convenance de la notation employée. Ainsi que l'a fait M. W. Roberts dans un travail analogue sur les courbes planes, on pourra donner à ces courbes le nom de *négatives*, tandis que celles qu'on a obtenues en premier lieu seront dites *positives*.

En désignant, comme précédemment, par φ l'angle dont la tangente serait

$$\frac{\sin r_{-n}\,d\omega_{-n}}{dr_{-n}},$$

on a

$$\mathrm{tang}\frac{1}{2}r_{-n} = \mathrm{tang}\frac{1}{2}r\sin^{-n}\varphi;$$

on a, du reste,

$$ds_{-n} = \frac{dr_{-n}}{\cos\varphi},$$

et

$$dr_{-n} = \frac{\sin\varphi^{-(n+1)}\left(\sin\varphi - n\sin r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}r\sin^{-n}\varphi\right)}.$$

Par suite,

$$ds_{-n} = \frac{\sin^{-(n+1)}\varphi\left(\tang\varphi - n\sin r\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\left(1+\tang^2 r\sin^{-n}\varphi\right)}.$$

Or c'est bien là l'expression de ds_n, dans laquelle n aurait changé de signe; il en sera aussi de même relativement à la valeur de ds_n, obtenue en fonction de ω et r.

En regardant la sphéro-lemniscate de seconde espèce comme la première d'une série de courbes se succédant suivant la loi indiquée, l'équation de la $n^{ième}$ courbe entre les coordonnées polaires sphériques r_n, ω_n sera

$$\left(\tang\frac{1}{2}r\right)^{\frac{2}{2n+1}} = (\tang\alpha)^{\frac{2}{2n+1}}\cos\left(\frac{2}{m+1}\omega_n\right).$$

(*Voir* tome IX, page 309, STREBOR.)

L'équation de la courbe primitive est

$$\tang^2\frac{1}{2}r = \tang^2\alpha\cos 2\omega.$$

En adoptant la rectification précédente

$$\tang\varphi = \frac{\sin r\,d\omega}{dr} = \frac{\tang\frac{1}{2}r\,d\omega}{d\tang\frac{1}{2}r},$$

la courbe donne

$$\frac{d\omega}{\tang\frac{1}{2}r} = -\frac{\tang\frac{1}{2}r}{\tang^2\alpha\sin 2\omega}.$$

Donc

$$\tang\varphi = -\frac{1}{\tang 2\omega};$$

par suite

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\omega.$$

On trouve facilement

$$\omega_n = n\varphi + \omega - n \cdot \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\omega_n = (2n+1)\omega:$$

mais

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}r_n = \operatorname{tang}\frac{1}{2}r\sin^n\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}r\cos^n 2\omega.$$

Élevant au carré et remplaçant $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r$ par sa valeur $\operatorname{tang}^2\alpha\cos 2\omega$, on a

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r_n = \operatorname{tang}^2\alpha\cos^{2n+1}2\omega;$$

et comme

$$2\omega = \frac{3}{2n+1}\omega_n,$$

il en résulte

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r_n = \operatorname{tang}^2\alpha\cos\frac{2}{2n+1}\omega_n,$$

ce qui revient à l'énoncé de M. Strebor.