

Théorèmes sur la décomposition des nombres en sommes de carrés

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 360-361

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__360_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN
SOMMES DE CARRÉS.**

1. Le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + 2y^2 = n$$

est égal au double de l'excès du nombre des diviseurs de n qui sont de l'une des deux formes

$$\delta + 1, \quad \delta + 3,$$

sur le nombre de diviseurs qui sont de la forme

$$\delta + 5, \quad \delta + 7. \quad (\text{LEJEUNE-DIRICHLET.})$$

2. n est un nombre impair positif; le nombre des solutions de l'équation

$$4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

est égal à la somme des facteurs de n , lorsque w, x, y, z sont des nombres impairs. (JACOBI.)

3. Soient m et p deux nombres premiers, et

$$p = m\pi + 1;$$

soit g une racine primitive relative au module p , et soit la congruence

$$g^e - a = \rho,$$

e étant l'indice de a , c'est-à-dire que, pour des exposants inférieurs à e , la congruence n'a pas lieu. Donnant à a successivement toutes les valeurs de la suite

$$1.2, \quad 2.3, \quad 3.4, \dots, \quad (p-2)(p-1)$$

(doubles des nombres triangulaires), si

a_0 est le nombre des indices e de la forme \dot{m} ,		
a_1	id.	$\dot{m} + 1$,
a_2	id.	$\dot{m} + 2$,
\vdots		
a_i	id.	$\dot{m} + i$,
\vdots		
a_{m-1}	id.	$\dot{m} + m - 1$,

nous aurons

$$2p = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{m-1} - a_0)^2.$$

(LEBESGUE.)

$$\begin{aligned} 4. (2a - b)^2 + 3b^2 &= (2b - a)^2 + 3a^2 = (a + b)^2 + 3(a - b)^2 \\ &= 4(a^2 - ab + b^2), \end{aligned}$$

un des quatre nombres $a, b, a + b, a - b$ est divisible par 3.

Observation. On a dit qu'il fallait admettre dans

$$x^2 + y^2 = 65^2,$$

comme une solution de décomposition,

$$65^2 = 65^0 + 0^2 \quad (\text{page 270}).$$

On oppose à cette assertion qu'il faudrait admettre : 1° que le zéro est un entier ; 2° que chaque carré est toujours décomposable en deux carrés ; 3° que le tout est égal à sa partie. Donc il semble que, pour éviter ces trois absurdités, la décomposition $65^2 + 0^2$ ne doit pas être admise. Nous répondons que, *analytiquement parlant*, zéro est le premier des *nombres entiers pairs* ; que, dans le même sens, un carré est non-seulement décomposable en deux carrés, mais en mille carrés. Il y a une foule de questions, où zéro est admis *analytiquement* comme une solution (*). Je ne comprends pas la troisième objection.

(*) Par exemple, tout nombre est la somme de quatre carrés. (FERMAT.)