Nouvelles annales de mathématiques

F. Frenet

Note sur un théorème de Descartes. Courbe roulant sur une autre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 299-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__299_0>

NOTE SUR UN THÉORÈME DE DESCARTES. COURBE ROULANT SUR UNE AUTRE;

PAR M. F. FRENET,
Professeur à la Faculté de Lyon.

Si l'on fait rouler dans un plan une courbe mobile A sur une courbe fixe B, les positions successives d'un point μ, invariablement lié à A, déterminent une ligne courbe dont la normale en chaque point va passer par le point de contact m des courbes A et B. On sait que ce théorème, dû à Descartes, s'établit très-simplement par la géométrie en assimilant les courbes à des polygones; en voici une démonstration analytique assez courte.

Rapportons la courbe fixe B à des axes rectangulaires (*). Soient $t'mt$ la tangente commune; x, y les coordonnées du point de contact m; ξ, η celles du point μ. La longueur $\mu m = r$ et l'angle θ que fait sa direction avec une droite quelconque, invariablement liée à A, constituent un système de coordonnées polaires auquel on peut concevoir que sont rapportés les points de cette courbe. Cela posé, de l'équation évidente

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$$

on tire par la différentiation

$$\text{(A)}\quad \frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds}-\left(\frac{x-\xi}{r}\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{d\eta}{ds}\right)=\frac{dr}{ds},$$

ds représentant l'élément de la courbe B.

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

Or l'angle $t'm\mu$ formé par le rayon vecteur μm et la direction mt' a pour cosinus la quantité $\frac{dr}{ds}$; d'un autre côté, ce cosinus est aussi égal à

$$\frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds};$$

il résulte de là que l'équation (A) peut se ramener à la forme

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+1=0,$$

qui démontre le théorème énoncé.

J'ajouterai ici une observation, très-connue sans doute, mais que je n'ai pas vue consignée dans les ouvrages où elle devrait se trouver. On sait qu'on parvient à la notion du centre instantané de rotation en donnant à une figure, dans son plan, deux positions différentes, et montrant qu'on peut toujours l'amener de l'une à l'autre par une rotation convenable autour d'un point fixe. Les deux positions de la courbe sont ordinairement supposées infiniment voisines, mais il est manifeste que c'est là une restriction inutile.

Remarquons, en effet, que le théorème dont il s'agit revient à celui-ci : *Étant données deux droites* AB, A′B′ *égales et situées d'une manière quelconque dans le même plan, il existe toujours un point* M *tel qu'on a*

$$\text{MA} = \text{MA}', \quad \text{angle MAB} = \text{angle MA}'\text{B}'.$$

Or, pour trouver ce point, il suffit d'élever des perpendiculaires sur le milieu des droites AA′, BB′; le point de rencontre est celui qu'on cherche. On y parvient aussi en prolongeant les droites données jusqu'à leur point de rencontre C, et circonscrivant un cercle au triangle ACA′; la perpendiculaire élevée sur le milieu de AA′ rencontre la circonférence en deux points dont l'un convient toujours. Cette dernière construction est souvent préférable à la première. Elle montre immédiatement que, lorsqu'une courbe mobile *glisse* infiniment peu sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation est au centre de courbure de la ligne fixe, et qu'il se confond avec le point de contact quand la courbe mobile *roule* sans glisser. On retrouve ici le théorème de Descartes.