Première question de Leibniz traitée par le calcul différentiel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 286-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__286_0>

PREMIÈRE QUESTION DE LEIBNIZ TRAITÉE PAR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Une Lettre de Leibniz à Hugens, datée de Hanovre le 26 janvier 1680, commence ainsi :

« Voicy un exemple de ma méthode des touchantes. J'ay pris le premier qui me paroissoit également curieux et embarrassé d'irrationnelles, et vous jugerez bien que je ne l'ay pas accommodé à ma méthode et que j'en aurois pu faire autant avec quelque autre. »

Il parle ensuite d'un phosphore qu'il a inventé pour allumer du papier et de la poudre, espèce d'allumette chimique, et ensuite de la démonstration que donne Fermat de la loi de la réfraction, des pompes d'épuisement employées au Harz, et il joint à cette Lettre cet écrit latin :

Specimen utilitatis methodi novæ tangentium, sive de maximis et minimis.

La question peut s'énoncer ainsi :

Soient A, B, C, D quatre points en ligne droite, et E un point tel, que l'on ait

$$\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC}+\frac{1}{ED}=\frac{1}{m},$$

m est une longueur donnée; il s'agit de mener par le point E une tangente au lieu géométrique du point E.

Voici sa construction :

Concevons menée la tangente ET, rencontrant la droite AD au point T; abaissons la perpendiculaire EF sur la même droite AD; il s'agit donc de trouver le rapport $\frac{TF}{EF}$.

On construit ces huit lignes :

$$x_1 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{DE}^3}, \quad x_2 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{CE}^3},$$

$$x_3 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{BE}^3}, \quad x_4 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{AE}^3},$$

$$x_5 = \frac{m^3 . \mathrm{DF}}{\mathrm{DE}^3}, \quad x_6 = \frac{m^3 . \mathrm{CF}}{\mathrm{CE}^3},$$

$$x_7 = \frac{m^3 . \mathrm{BF}}{\mathrm{BE}^3}, \quad x_8 = \frac{m^3 . \mathrm{AF}}{\mathrm{AE}^3};$$

La différentiation de l'équation ci-dessus (page 286) donne tout de suite $\frac{dy}{dx}$, et cela quel que soit le nombre des points A, B, C, etc., et quelle que soit la relation entre les distances EA, EB, EC, etc. C'est l'immense avantage du calcul différentiel, la plus importante création que l'on ait jamais faite et qu'il soit même possible d'imaginer dans le monde des quantités. Il nous découvre l'essence embryonnaire des grandeurs; tandis que la puissance bornée du microscope met une limite aux investigations ovologiques des naturalistes, le géomètre dissèque le dx en une infinité de d^2x; le d^2x en une infinité de d^3x, etc., et rien n'arrête son scalpel (*).

Le *Spécimen* se termine ainsi :

Hanc solutionem paucis calculi linæis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine tædio fieri potest : et tamen postea cum valores aut construc-

(*) C'est une tache indélébile pour notre enseignement secondaire de rejeter obstinément les conseils de d'Alembert, de Coriolis, et de repousser une locomotive intellectuelle la plus rapide qu'on connaisse.

tiones quærimus, cogemur aequationes inutiliter exaltatæ iterum depressiones investigare, qui labor in æquationibus decimum longe gradum excedentibus, qualis ista foret, sæpe immensus est (page 38).

Dans une Lettre précédente de Hanovre, 8 septembre 1679, il écrit :

« J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmétique, afin de l'y faire imprimer un jour. J'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir à bout de la pluspart des choses qui paroissoient jusqu'icy au-dessus du calcul, par exemple les quadratures et *methodus tangentium inversa*, et les racines irrationnelles des équations, et l'arithmétique de Diophante; car j'ay des méthodes générales qui donnent la pluspart de ces choses d'une manière aussi déterminée que celle dont l'Algèbre ordinaire se sert pour arriver à une équation. Et je ne crains pas de dire qu'il y a moyen d'avancer l'Algèbre au delà de ce que Viète et Des-Cartes nous ont laissé, autant que Viète et Des-Cartes ont passé les anciens. Mais, comme ces méthodes générales mènent ordinairement à des grands calculs, lorsque les conditions du problème ne fournissent pas quelque adresse singulière, j'ay projetté un moyen de les abréger : ce sont certaines Tables qu'on pourroit faire calculer en lettres, et qui seroient aussi importantes pour l'Algèbre que les Tables des sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus, elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces Tables estoient faites, les opérations d'Algèbre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux méthodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matière » (page 17).

Quelle était cette méthode pour l'arithmétique de Diophante, et en quoi pouvaient consister ces Tables ?

Il parle encore dans cette Lettre d'équations déterminées d'un nouveau genre, où le degré même est inconnu, et donne pour exemple

$$x^z + z^x = a, \quad x^x + z^z = b.$$

Il demande qu'on trouve les valeurs des inconnues, mais sans intersections de lignes : cette question n'est pas encore résolue.

Ce qui précède est extrait de l'ouvrage suivant : *Leibnizens mathematische schriften herausgegeben von* C.-I. Gerhardt.

Ecrits mathématiques de Leibniz, édités par C.-I. Gerhardt, t. II et VIII. Berlin, 1850.

Cet ouvrage fait partie des OEuvres de Leibniz, tirées des manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre, et publiées par Georges-Henri Pertz.

Le premier volume contient la correspondance avec Hugens et le marquis de l'Hospital.

Leibniz avait été envoyé à Paris en 1672, avec une mission politique de l'électeur de Mayence auprès de Louis XIV, et il resta à Paris jusque vers la fin de 1676. Il s'y lia avec Hugens, auquel il soumettait tous ses travaux et dont il reçut aussi des instructions. Leibniz s'est, en plusieurs occasions, proclamé le *disciple* de Hugens. Cette correspondance a commencé à Paris même, résidence de Hugens après qu'il fut devenu membre de l'Académie, et n'a cessé qu'à sa mort (8 juillet 1695). Lors du retour de Leibniz en Allemagne, en 1676, la correspondance paraît avoir été interrompue pendant quelques années, et a été reprise en septembre 1679.

Dans ces Lettres, Leibnitz signe constamment Leibniz, et Huyghens signe Hugens. Dans une Lettre, Hugens se plaint (page 41) de ce que les rédacteurs des *Acta eruditorum* l'ont qualifié *Dynasta in Zulichem;* il demande cette rectification : *Dynasta in Zeelhem.*

Hugens éprouve d'abord de la répugnance à admettre le nouveau calcul, dont il croit pouvoir se passer; mais il finit par en reconnaître la toute-puissance. Il a de la peine à comprendre le $d^2 x$, et demande des explications que Leibniz donne par la théorie des osculations.

Hugens servait d'intermédiaire entre Leibniz et Fatio de Duiller, géomètre genevois de grand mérite; il leur proposait des problèmes que Leibniz résolvait par son instrument avec facilité et complétement, tandis que Fatio était souvent arrêté ou ne donnait que des solutions incomplètes. Cela suffit pour nous expliquer l'animosité de Fatio, qui, lié depuis avec Newton, a soulevé contre Leibniz cette accusation de plagiat dont la fausseté est aujourd'hui victorieusement démontrée; mais il faut reconnaître que Leibniz ramenait toutes les questions aux quadratures, et qu'il ne résolvait celles-ci que par des séries : le calcul intégral est, à vrai dire, la création des Bernoulli; car l'Analyse des infiniment petits, de l'Hospital (1696), le premier Traité didactique, contient le calcul différentiel et ne renferme rien sur la *méthode inverse des tangentes.*

Leibniz demande l'avis de Hugens sur son *Codex Juris gentium.* Hugens refuse en ces termes : « Le peu d'attachement et d'estime que j'ay *per queste canzoni politiche* (comme le P. Paolo les appeloit) me tient hors du commerce pour tout ce qui les regarde, et je souffre mesme avec peine qu'un esprit comme le vostre y emploie du temps » (page 162).

Leibniz répond : « En vérité, je m'accommoderois davantage de ce qui est de vostre goust, si j'en avois absolument le choix, et j'estime plus les vérités éternelles qui éclairent l'esprit, que les faits ou les vérités temporelles. Il faut cependant avouer qu'encore en matières de droit, de morale et de politique, on pourroit faire des découvertes et des raisonnements exacts. Et souvent on y manque en pratique, parce qu'on a coustume de les traiter superficiellement. » Cette dernière observation est d'une grande justesse : parmi ceux qui s'occupent de ces matières, les esprits superficiels sont en immense majorité.