COMBESCURE

Solution de la question 180

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 283-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__283_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 180

(voir t. VII, p. 157);

PAR M. COMBESCURE.

Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs de parabole ayant le même foyer, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera un ovale de Descartes.

L'équation polaire d'une parabole est, entre les coordonnées r et θ, issues du foyer,

$$r = \frac{p}{1 - \cos(\theta - \varepsilon)},$$

p et ε étant deux constantes arbitraires dont la signification est très-connue. En faisant passer la parabole par le point (r_1, θ_1), on aura

$$r = r_1 \frac{1 - \cos(\theta_1 - \varepsilon)}{1 - \cos(\theta - \varepsilon)} \quad \text{ou} \quad r = r_1 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)}.$$

Pour une deuxième parabole de même foyer et passant par un point (r_2, θ_2), on aurait semblablement

$$r = r_2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta_2 - \omega)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \omega)}.$$

Ces deux équations prises ensemble déterminent les coordonnées r, θ du sommet du triangle parabolique; mais il faut y joindre la condition relative à l'angle au sommet. Or μ et ν étant les inclinaisons respectives des deux paraboles sur le rayon vecteur r, on a

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d.lr} = -\cot\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon),$$

$$\operatorname{tang}\nu = -\cot\frac{1}{2}(\theta - \omega);$$

d'où, en appelant $\frac{A}{2}$ l'angle donné au sommet,

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \operatorname{tang}(\mu - \nu) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varepsilon - \omega), \quad \varepsilon - \omega = A.$$

En éliminant ε entre les deux équations

$$\sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)}, \quad \sqrt{\frac{r}{r_2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_2 + A - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta + A - \varepsilon)},$$

on aura l'équation du lieu cherché entre r et θ, et il faudra se rappeler que, dans l'équation ainsi obtenue, $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$ sont censés comporter le signe $\pm$. Ces équations donnent d'abord

$$\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon) + \sin\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon) - \sin\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2} - \varepsilon\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 - \theta}{2}\right)},$$

$$\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_2}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2 + \theta}{2} + A - \varepsilon\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2 - \theta}{2}\right)}:$$

or

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 \mp \theta_2}{2} - A\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2} - \varepsilon - \frac{\theta_2 + \theta}{2} + A - \varepsilon\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2} - \varepsilon\right) - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2 + \theta}{2} + A - \varepsilon\right)}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2} - \varepsilon\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2 + \theta}{2} + A - \varepsilon\right)};$$

donc, en appelant k le premier membre et ayant égard aux équations précédentes,

$$k\left[\begin{array}{l}(\sqrt{r}-\sqrt{r_1})(\sqrt{r}-\sqrt{r_2})+(\sqrt{r}+\sqrt{r_1})(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})\\ \times \operatorname{tang}\frac{\theta_1-\theta}{4}\operatorname{tang}\frac{\theta_2-\theta}{4}\end{array}\right]$$

$$=(\sqrt{r}+\sqrt{r_1})(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})\operatorname{tang}\frac{\theta_1-\theta}{4}$$

$$-(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})(\sqrt{r}-\sqrt{r_1})\operatorname{tang}\frac{\theta_2-\theta}{4};$$

ce qui se réduit à

$$\sin\frac{A}{2}\times r+\left[\sqrt{r_1}\sin\frac{1}{2}(\theta-A-\theta)-\sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}(\theta_2+A-\theta)\right]$$

$$\times\sqrt{r}-\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2-A)=0,$$

ou, par une introduction facile de nouvelles constantes $2\sqrt{a}$, b, α,

$$r+2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\sqrt{r}-b=0;$$

d'où

$$\sqrt{r}=\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\pm\sqrt{a\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\alpha)+b},$$

et, si l'on veut,

$$\sqrt{r}=\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\theta\pm\sqrt{a\sin^2\frac{1}{2}\theta+b},$$

équation d'un ovale de Descartes.