NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI FLEURY

Condition d'équilibre du double cône sur deux droites concourantes et également inclinées sur le plan horizontal

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 211-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__211_1>

CONDITION D'ÉQUILIBRE DU DOUBLE CONE SUR DEUX DROITES CONCOURANTES ET ÉGALEMENT INCLINÉES SUR LE PLAN HORIZONTAL;

PAR M. HENRI FLEURY.

On sait qu'abstraction faite du frottement, un corps, soumis à la seule action de la pesanteur, ne saurait être en équilibre ni remonter sur un plan incliné; cependant on voit, dans quelques cabinets de physique, deux appareils présentant des phénomènes qui semblent contredire ce principe. Le premier est un cylindre de bois qui, en roulant sur sa surface convexe, remonte un plan incliné : le cylindre renferme une masse de plomb située près de cette surface. On comprend que le mouvement ascendant du corps sur le plan est dû à la position du centre de gravité et au frottement.

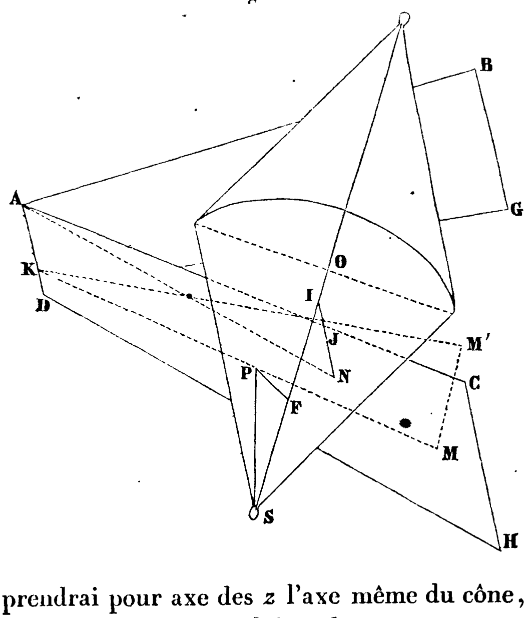
Le second appareil est un double cône qui roule en remontant sur deux droites concourantes et également inclinées sur le plan horizontal. Le double cône remonte sur ces droites en ce sens que les points où il s'appuie sur elles, s'élèvent pendant le mouvement : dans le fait, le corps descend en s'engageant entre ces deux droites, qui servent à en diriger le mouvement, et auxquelles je donnerai, pour cela, le nom de *directrices*.

Mais pour que le double cône présente ce phénomène paradoxal, il faut que l'angle des directrices et leur inclinaison sur le plan horizontal soient pris de grandeur convenable; car si, sans faire varier l'angle de ces droites, on augmente suffisamment leur inclinaison sur le plan horizontal, on verra le corps se mouvoir en sens contraire. Or, le mouvement pouvant avoir lieu dans l'un ou l'autre sens, suivant la grandeur de cette inclinaison, on comprend que pour une certaine valeur intermédiaire, le corps restera en équilibre sur les deux directrices, et la question que je me propose ici consiste à trouver l'expression analytique de la condition de cet équilibre entre les variables dont il dépend.

Il faut bien remarquer que le frottement n'entre pour rien dans l'équilibre dont nous nous occupons contrairement à ce qui a lieu pour tout équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné; ainsi, quoique les deux directrices déterminent un plan incliné, le corps ne saurait être considéré comme posé sur ce plan, mais bien sur les deux plans tangents au cône conduits suivant ces droites. Le cas d'équilibre répondrait à celui où l'intersection de ces plans serait horizontale, et cette condition exprimée analytiquement donnerait la formule cherchée. Mais on peut arriver au même résultat de bien des manières différentes, et je m'arrêterai aux deux suivantes :

1°. D'abord je dis qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre, que la verticale menée par le centre de gravité du corps, supposé homogène et placé symétriquement par rapport aux deux directrices, rencontre la droite qui joint les points de contact. Cette condition est nécessaire, puisque si la force qui représente le poids du corps ne rencontrait pas cette droite, elle ne pourrait pas s'y détruire entièrement; car deux points fixes, susceptibles d'une résistance indéfinie en tout sens, ne pouvant détruire une force qu'autant que celle-ci est dans un même plan avec eux, à plus forte raison en est-il ainsi de nos points de contact, dont chacun ne peut opposer qu'une résistance normale à la directrice correspondante. En second lieu, cette condition est suffisante, puisqu'on reconnaît à priori qu'il y a toujours un cas d'équilibre possible, et que cet équilibre ne saurait exister quand la rencontre n'a pas lieu.

Fig 1.



Je prendrai pour axe des z l'axe même du cône, pour axe des y le diamètre vertical de sa base, et pour axe des x le diamètre horizontal de cette même base. Je représenterai par m l'angle que fait l'axe du cône avec sa génératrice, par α l'inclinaison du plan des directrices AB, AC sur le plan horizontal, et par β la moitié de l'angle des plans verticaux menés suivant ces droites.

Cela posé, soient P (*fig.* 1) un point quelconque de la surface du cône, et F sa projection sur l'axe des z. La génératrice SP faisant avec cet axe un angle que nous avons désigné par m, on a

$$\mathrm{FP} = \mathrm{SF} \tang m, \quad \text{ou} \quad \mathrm{FP} = (h - z) \tang m,$$

en appelant h la hauteur du cône; mais on a aussi

$$\overline{\mathrm{FP}}^2 = x^2 + y^2,$$

donc

$$x^2 + y^2 = (h - z)^2 \tang^2 m.$$

Cette relation ayant lieu pour un point quelconque de la surface du cône, est l'équation même de cette surface.

Pour avoir l'équation du plan vertical ACH, M un de ses points, M′ la projection de ce point sur la base du cône, et M′K perpendiculaire à l'intersection AD des deux plans verticaux. L'angle MKM′ sera celui que nous avons désigné par β, et l'on aura

$$\mathrm{MM'} = \mathrm{M'K} . \tang \beta;$$

mais on a aussi

$$\mathrm{MM'} = z, \quad \mathrm{M'K} = l + x,$$

en représentant par l la distance du centre à la verticale AD, donc

$$z = (l + x) \tang \beta.$$

Telle est l'équation du plan AH.

Si l'on y joint celle du cône, elles représenteront simultanément leur commune intersection.

L'élimination de z entre ces deux équations donne l'équation de la projection de cette courbe sur le plan de la base; on trouve ainsi

$$(1) \quad x^2 + y^2 = \tan^2 m \left(h^2 + \tan^2 6\,(l + x)^2 - 2h \tan 6\,(l + x)\right),$$

Si l'on y fait $x = 0$, on obtiendra pour y l'ordonnée du point où l'ellipse que représente cette équation est rencontrée par la verticale menée du centre du corps. Cette valeur de y est

$$\tan m\,(l \tan 6 - h).$$

La tangente menée à cette ellipse par le point

$$(x = 0, \quad y = \tan m\,(l \tan 6 - h))$$

fait précisément avec l'axe des x, ou avec le plan horizontal, l'angle que nous avons désigné par α; et l'on sait qu'on obtient la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, en prenant la dérivée de y par rapport à x dans l'équation de la courbe, et substituant aux coordonnées courantes celles du point de contact. Or l'équation (1) donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan^2 m \tan 6\,(l \tan 6 + x \tan 6 - h) - x}{y},$$

qui devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan^2 m \tan 6\,(l \tan 6 - h)}{\tan m\,(l \tan 6 - h)},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \tan m \tan 6,$$

quand on y fait

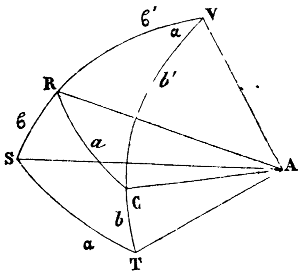
$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = \tan m\,(l \tan 6 - h);$$

on a donc

$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} m \operatorname{tang} \beta.$$

Telle est la relation très-simple qui exprime la condition nécessaire et suffisante entre les trois angles m, α et β, pour l'équilibre du double cône sur deux droites qui se rencontrent et qui font un même angle avec le plan horizontal.

Fig 2.



Au lieu de β, on pourrait donner le demi-angle b des deux directrices, et au lieu de α, l'angle a que fait chacune d'elles avec le plan horizontal.

Pour découvrir ce que devient alors la relation trouvée plus haut, soient AV (*fig.* 2) l'intersection du plan des deux directrices avec le plan horizontal mené par leur point de rencontre; AR l'intersection de ce plan horizontal avec le plan vertical conduit suivant la directrice AC; AS l'intersection du même plan horizontal avec le plan vertical mené par la bissectrice AT de l'angle des deux directrices. Joignons ensuite, par des arcs de grands cercles, les points où ces droites percent la surface d'une sphère décrite du point A; on aura

$$\mathrm{CVR} = \alpha, \quad \mathrm{CR} = a, \quad \mathrm{RS} = \beta, \quad \mathrm{CT} = b,$$

$$\mathrm{RV} = \frac{\pi}{2} - \beta = \beta', \quad \mathrm{CV} = \frac{\pi}{2} - b = b'.$$

Maintenant le triangle sphérique CRV, rectangle en R, donne

$$\tang \alpha = \frac{\tang a}{\sin \beta'} \quad \text{ou} \quad \tang \alpha = \frac{\tang a}{\cos \beta};$$

$$\cos \beta' = \frac{\cos b'}{\cos a} \quad \text{ou} \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\cos a};$$

$$\sin b' = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \quad \text{ou} \quad \cos b = \frac{\sin a}{\sin \alpha}.$$

De ces trois équations et de $\tang \alpha = \tang m \tang \beta$, on déduit

$$\tang m = \frac{\tang \alpha}{\tang \beta} = \frac{\tang a}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\tang b}.$$

Si l'angle m a une valeur supérieure à celle qui lui est assignée par cette formule, le double cône remontera sur les deux directrices en s'éloignant de leur point de rencontre ; dans le cas contraire, il roulera en sens opposé.

On peut d'ailleurs prouver que la relation

$$\tang m = \frac{\tang a}{\sin \beta} = \ldots,$$

que nous venons d'établir, se rapporte bien au cas d'équilibre. En effet, si l'on cherche la distance de l'axe du cône au plan horizontal conduit par le point de rencontre des deux directrices, on voit que, dans ce cas, elle est égale à la verticale IN (*fig.* 1) menée par le point de contact J, entre cet axe et l'horizontale AN. Or,

$$\mathrm{IN} = \mathrm{IJ} + \mathrm{JN} = \mathrm{SI} \tang m + \mathrm{AN} . \tang a ;$$

d'autre part, on a

$$\mathrm{OI} = h - \mathrm{SI} \quad \text{et} \quad \mathrm{OI} = \mathrm{AN} . \sin \beta,$$

d'où

$$h - \mathrm{SI} = \mathrm{AN} \sin \beta.$$

Reportant la valeur de SI tirée de cette dernière équation dans

$$\text{IN} = \text{SI} \tang m + \text{AN} \tang a ,$$

on obtient

$$\text{IN} = h \tang m + \text{AN} (\tang a - \sin 6 \tang m),$$

relation qui, à cause de

$$\tang m = \frac{\tang a}{\sin 6},$$

se réduit à

$$\text{IN} = h \tang m.$$

La valeur de IN est donc constante. Ainsi, toutes les fois que notre formule sera vérifiée, la distance du centre de gravité du double cône au plan horizontal restera la même, quelque part qu'on le place sur les directrices. Il ne pourra donc tendre à se mouvoir d'un côté plutôt que du côté opposé

2°. Pour donner une seconde solution de la même question, je démontrerai d'abord que, pour l'équilibre, il est suffisant et nécessaire que le plan qui passe par le centre et les deux points de contact soit vertical. En effet, ce plan étant vertical, la force p, que je suppose représenter le poids du corps, y sera comprise. Si par les points de contact nous menons dans ce plan des perpendiculaires aux génératrices correspondantes, elles seront aussi normales aux plans tangents conduits suivant les directrices, et, par conséquent, aux directrices elles-mêmes, et, de plus, elles se rencontreront en un point de la direction de la force p. Cette force pourra donc se décomposer en deux autres, dirigées suivant ces normales et détruites par les points de contact. Il est donc établi que, pour l'équilibre, il suffit que le plan mené par le centre du corps et les deux points où il s'appuie sur les directrices, soit vertical. J'ajoute que cette condition est nécessaire; car si ce plan, au lieu d'être vertical, faisait un certain angle i avec la direction de la force p, cette force pourrait se décomposer en deux autres, l'une normale au plan et l'autre située dans ce plan : celle-ci pourrait être remplacée par deux forces qui iraient se détruire aux points de contact, comme il vient d'être expliqué plus haut; l'autre, dont la valeur serait $p \sin i$, donnerait lieu à un couple qui ferait tourner le corps et aurait pour moment $p(h - z) \sin i \tang m$, le z se rapportant ici au point où la directrice touche le cône.

Reprenons donc le cas où le plan est vertical : la directrice AC et la composante correspondante de la force p étant perpendiculaires entre elles, si l'on multiplie l'un par l'autre les cosinus que leurs directions font avec chacun des axes des coordonnées, on obtiendra trois produits dont la somme devra être nulle; mais on voit tout d'abord que le produit relatif à l'axe des x sera nul lui-même, puisque la direction de la composante est perpendiculaire à cet axe. Les cosinus des angles que la directrice AC fait avec les deux autres axes ont pour valeurs $-\sin a$ et $\sin b$; ceux qui se rapportent à la composante de la force sont $\cos m$ et $\sin m$; donc

$$\sin b \sin m - \sin a \cos m = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} m = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

C'est la relation que nous avions déjà trouvée, par une autre voie, entre les trois angles m, a et b.