NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SYLVESTER

Relation entre le volume d'un tétraèdre et la norme de sa surface

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 203-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__203_1>

RELATION ENTRE LE VOLUME D'UN TETRAÈDRE ET LA NORME DE SA SURFACE;

D'APRÈS M. SYLVESTER.

(Cambridge and Dublin mathematical Journal, mai 1853.)

---

1. *Notation:* a, b, c, d, sommets du tétraèdre;
ab, ac, ad, bc, bd, cd, six arêtes du tétraèdre;
V = volume du tétraèdre.

On supprime partout les *facteurs numériques;* ils n'ont aucune influence sur les raisonnements qui suivent :

$$\frac{F}{16} = (bcd)^2, \quad \frac{G}{16} = (acd)^2, \quad \frac{H}{16} = (abd)^2, \quad \frac{K}{16} = (abc)^2;$$

N = norme de $F^{\frac{1}{2}} + G^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$ = norme de la surface du tétraèdre.

2.
$$\begin{aligned}
-F &= (bc)^4 + (cd)^4 + (db)^4 - 2(bc)^2(cd)^2 \\
&\quad - 2(cd)^2(db)^2 - 2(db)^2(bc)^2;\\
-G &= (ac)^4 + (cd)^4 + (da)^4 - 2(ac)^2(cd)^2 \\
&\quad - 2(cd)^2(da)^2 - 2(da^2)(ac^2);\\
-H &= (ab)^4 + (bd)^4 + (da)^4 - 2(ab)^2(bd)^2 \\
&\quad - 2(bd)^2(da)^2 - 2(da)^2(ab)^2;\\
-K &= (ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4 - 2(ab)^2(bc)^2 \\
&\quad - 2(bc)^2(ca)^2 - 2(ca)^2(ab)^2.
\end{aligned}$$

$V^2 =$ déterminant.

$$\left|\begin{array}{ccccc} 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 & 1 \\ ba^2 & 0 & bc^2 & bd^2 & 1 \\ ca^2 & cb^2 & 0 & cd^2 & 1 \\ da^2 & db^2 & dc^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \quad \left(\text{le facteur supprimé est } \frac{1}{144}\right).$$

$$N = \Sigma F^4 - 4\Sigma F^3 G + 6\Sigma F^2 G^2 + 4\Sigma F^2 GH - 40 FGHK.$$

Σ désigne une fonction symétrique; ainsi

$$\Sigma F^4 = F^4 + G^4 + H^4 + K^4,$$

et ainsi des autres.

N renferme 22 termes positifs et 13 négatifs; en tout, 35 termes en F, G,.... Les lettres F, G, H, K renfermant chacune 6 termes, il s'ensuit que N contient $35.6^4 = 45360$ termes, fonctions des carrés des arêtes.

3. Lorsque les quatre sommets sont dans un même plan, on a évidemment

$$\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K} = 0,$$

mais cette expression est un facteur de N; donc N s'anéantit dans cette supposition et aussi V; par conséquent, N renferme, comme facteur, une puissance de V; mais N est une fonction rationnelle des carrés des arêtes, fonction du huitième degré, et V^2 une fonction rationnelle des mêmes carrés et du troisième degré : on a donc

$$N = V^2 Q,$$

et Q est une fonction rationnelle des mêmes carrés et du cinquième degré ; il s'agit de trouver Q.

Lorsque deux arêtes opposées deviennent nulles, Q devient aussi nul; en effet, supposons

$$ab = 0, \quad cd = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
-\mathrm{F} &= [(bc)^2 - (db)^2]^2,\\
-\mathrm{G} &= [(ca)^2 - (da)^2]^2,\\
-\mathrm{H} &= [(ad)^2 - (bd)^2]^2,\\
-\mathrm{K} &= [(ac)^2 - (bc)^2]^2,\\
\mathrm{F} - \mathrm{G} - \mathrm{H} + \mathrm{K} &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi N est nul; mais V^2 n'est pas nul, car V^2 est alors six fois le déterminant.

$$\begin{matrix}
0\ . & 0\ . & ac^2\ . & ad^2\ . & 1, \\
0\ . & 0\ . & bc^2\ . & bd^2\ . & 1, \\
ca^2\ . & cb^2\ . & 0\ . & 0\ . & 1, \\
da^2\ . & db^2\ . & 0\ . & 0\ . & 1, \\
1\ . & 1 & 1\ . & 1\ . & 0,
\end{matrix}$$

déterminant qui n'est pas nul, puisqu'on a le terme

$$ad^2 \,.\, bc^2 \,.\, cb^2 \,.\, 1 \,.\, 1,$$

et encore d'autres.

Effectuant, on trouve

$$2(ac^2 \,.\, bd^2 - ad^2 \,.\, bc^2)(ad^2 + bc^2 - ac^2 - bd^2)\ (*)$$

(Voir *Nouvelles Annales*, tome XI, page 301).

Or

$$\mathrm{N} = \mathrm{V}^2\mathrm{Q};$$

il faut donc que, dans cette hypothèse, Q s'annule.

Ainsi, α, β, γ étant les arêtes partant d'un sommet, et α', β', γ' les arêtes respectivement opposées, chaque terme de Q doit renfermer, soit α ou α', soit β ou β', soit γ ou γ'.

(*) Le volume n'étant pas nul, il faut que la distance des deux arêtes opposées *ab*, *cd* devienne infinie.

Supposons, maintenant,

$$ab = 0\,, \quad ac = 0\,;$$

on obtient

$$\sqrt{\mathrm{K}} = i\,.\,\overline{bc}^2\,,$$
$$\sqrt{\mathrm{H}} = i\,(\overline{ad}^2 - \overline{bd}^2)\,,$$
$$\sqrt{\mathrm{G}} = i\,(\overline{ad}^2 - \overline{cd}^2)\,,$$
$$\mathrm{F} = -\,bc^4 - bd^4 - cd^4 + 2\,bc^2.bd^2 + 2\,bcd^2.cd^2 + 2\,cd^2.cd^2.$$

N est le produit de ces huit facteurs :

$$(\pm\sqrt{\mathrm{F}} - \sqrt{\mathrm{G}} + \sqrt{\mathrm{H}} + \sqrt{\mathrm{K}})\,(\pm\sqrt{\mathrm{F}} + \sqrt{\mathrm{G}} - \sqrt{\mathrm{H}} + \sqrt{\mathrm{K}})$$
$$\times\,(\pm\sqrt{\mathrm{F}} + \sqrt{\mathrm{G}} + \sqrt{\mathrm{H}} + \sqrt{\mathrm{K}})\,(\pm\sqrt{\mathrm{F}} + \sqrt{\mathrm{G}} + \sqrt{\mathrm{H}} - \sqrt{\mathrm{K}}).$$

Les quatre premiers facteurs donnent, toujours dans la supposition $ab = 0$, $ac = 0$,

$$[\mathrm{F} + (bc^2 + cd^2 - bd^2)^2]\,[\mathrm{F} + (bc^2 - cd^2 + bd^2)^2]$$
$$= 16\,.\,bc^4.bd^2.cd^2.$$

Les quatre derniers facteurs donnent

$$[\mathrm{F} + (2\,ad^2 - bd^2 - cd^2 + bc^2)]\,[\mathrm{F} + (2\,ad^2 - bd^2 - cd^2 - bc^2)^2]$$
$$= 16\left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2.bd^2 + bd^2.cd^2 \\ \qquad + cd^2.bc^2 \end{array}\right]$$
$$[ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2\,cd^2].$$

Dans cette même hypothèse, V^2 devient

$$\begin{array}{ccccc} 0\,. & 0\,. & 0\,. & ad^2. & 1\,, \\ 0\,. & 0\,. & bc^2. & bd^2. & 1\,, \\ 0\,. & cb^2. & 0\,. & cd^2. & 1\,, \\ da^2. & db^2. & dc^2. & 0\,. & 1\,, \\ 1\,. & 1\,. & 1\,. & 1\,. & 0\,, \end{array}$$

déterminant égal à

$$2\, bc^2\,[ad^4 - ad^2.(bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2\ cd^2]$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 304).

Ainsi, dans cette hypothèse, $Q = \frac{N}{V^2}$ se réduit à

$$bc^2.\,bd^2.\,cd^2 \left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2 (bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2.\,bd^2 \\ + bd^2.\,cd^2 + cd^2.\,bc^2 \end{array} \right],$$

le facteur supprimé est 48^2.

Ce sont tous les termes de Q qui ne renferment ni ab ni ac; donc la somme de tous les termes qui ne contiennent que les carrés de quatre arêtes est donnée par la fonction symétrique

$$\Sigma\, bc^2.\,bd^2.\,cd^2 \left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2 (bd^2 + cd^2.cb^2) \\ + bc^2.\,bd^2 + bd^2.\,cd^2 + cd^2.\,bc^2 \end{array} \right],$$

il est évident qu'on peut changer b en c et c en b, b en d et d en b, c en d et d en c, de sorte que la fonction peut s'écrire

$$\Sigma\, bc^2.\,bd^2.\,cd^2 \left[\begin{array}{l} ab^4 + ac^4 + ad^4 \\ - (ab^2 + ac^2 + ad^2)(bd^2 + dc^2 + cb^2) \\ + bc^2.\,bd^2 + bd^2\ cd^2 + cd^2.\,bc^2 \end{array} \right];$$

bc, bd, cd sont les trois côtés du triangle bcd, ainsi il y a quatre expressions de cette forme. Il reste à trouver le coefficient numérique des six termes de la forme

$$ab^2.\,ac^2.\,ad^2.bc^2.\,bd^2.$$

Soit λ ce facteur numérique; supposons les six arêtes du tétraèdre égales chacune à l'unité; Q aura pour valeur

$$4(3 - 9 + 3) + 6\lambda = -12 + 6\lambda;$$

les arêtes étant égales, il y aura quelques facteurs de N égaux à zéro : mais V volume du tétraèdre n'est pas nul, donc Q est nul, et l'on a

$$6\lambda - 12 = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = 2;$$

ainsi la valeur complète de Q est (abstraction faite du facteur numérique)

$$Q = \Sigma\, ab^2 . bc^2 . ca^2 \left[\begin{array}{l} (da^4 + db^4 + dc^4 \\ -(da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ + ab^2 . bc^2 + bc^2 . ca^2 + ca^2 . ab^2 \end{array}\right]$$
$$+ 2\,\Sigma\, ab^2 . bc^2 . cd^2 . da^2 . ac^2 .$$

Le premier Σ renferme quatre expressions de cette forme, et le second Σ donne six. On peut n'admettre qu'un seul signe Σ, et alors

$$Q = \Sigma\, ab^2 . bc^2 . ca^2 \left[\begin{array}{l} da^4 + db^4 + dc^4 + da^2 . db^2 + db^2 . dc^2 \\ + dc^2 . da^2 + ab^2 . bc^2 + bc^2 . ca^2 \\ + ea^2 . ab^2 \\ -(da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \end{array}\right].$$

4. Nous avons vu que Q s'annule lorsque deux arêtes opposées *ab*, *cd* s'évanouissent; il en est de même lorsqu'on a simultanément

$$ab = cd, \quad bc = ad,$$

car alors les faces $abc = acd$, $bdc = bda$: donc N s'évanouit, mais V conserve une valeur finie; ainsi Q devient nul (*).

5. Soient r_1, r_2, r_3,..., r_8 les rayons des huit sphères

(*) Q doit aussi devenir nul lorsqu'on a généralement

$$abc + bdc = acd + bda.$$

Lorsque $abc = acd$, $bcd = bda$, deux rayons deviennent infinis. (Voir *Nouvelles Annales*, t. VI, p. 257, CATALAN.) TM.

inscrites au tétraèdre; on a évidemment

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 = \frac{(3V)^8}{N} = \frac{3^8 V^6}{Q}.$$

Donc, lorsque Q est nul, l'un au moins des rayons devient infini, et la sphère correspondante devient un plan. La propriété analogue n'a pas lieu pour le triangle. Soient f, g, h les carrés des côtés du triangle; A l'aire du triangle et V la norme de $\pm\sqrt{f} \pm \sqrt{g} \pm \sqrt{h}$, P le produit des quatre rayons des cercles inscrits; on a

$$PV = (2A)^4, \quad V = \frac{(2A)^4}{P} = A^2, \quad P = 16A^2;$$

ainsi P ne peut jamais devenir infini, à moins que A ne soit infini; alors il n'y a plus de triangle.

6. D'après la forme et la propriété de la fonction Q de caractériser, en s'annulant, une sphère infinie, l'illustre analyste conjecture que cette fonction est un *déterminant*, et qu'en désignant par Q' la fonction analogue pour le tétraèdre $a' b' c' d'$, le produit QQ', et peut-être même $\sqrt{QQ'}$ est une fonction des carrés des distances des sommets des tétraèdres, comme dans le théorème de M. Staudt (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 299).

En considérant les six longueurs ab, ac, ad, bc, bd, cd comme des quantités quelconques, la divisibilité de N par V^2 constitue un beau théorème dans la *morphologie analytique*, qui doit à M. Sylvester tant de richesses, tant de précieuses découvertes.
