Théorème de M. Steiner sur les cercles osculateurs, démontré par M. A., capitaine d'artillerie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 139-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__139_0>

THÉORÈME DE M. STEINER SUR LES CERCLES OSCULATEURS

(voir t. XII, p. 119),

DÉMONTRÉ PAR M. A.,

Capitaine d'Artillerie.

THÉORÈME. *Par un point pris dans le plan d'une ligne de degré n passent $3n(n-1)$ cercles de courbure de la courbe. Si le point est sur la courbe, ce nombre est diminué de deux unités.*

Démonstration. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de degré n d'une courbe plane, rendue homogène par l'introduction de la variable z. Si, pour abréger, on pose, comme dans le Mémoire de Jacobi sur les tangentes doubles (tome XII, page 150),

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(h) &= f(x + ah, y - ah, z) = u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots + u_n h^n, \\
\varphi_1(h) &= f(x - ch, y, z + ah) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v_n h^n, \\
\varphi(h) &= f(x, y + ch, z - bh) = w_2 h^2 + w_3 h^3 + \ldots + w_n h^n,
\end{aligned}$$

on aura

$$(1) \quad u_2 x^2 = w_2 z^2, \quad u_2 y^2 = v_2 z^2 \quad \text{(tome XII, page 151)}.$$

Cela posé, le lieu des points d'osculation, en prenant le point donné pour origine, est

$$(y^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0,$$

équation dans laquelle il faut mettre pour $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, leurs valeurs tirées de l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Or,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}b^2 - 2\frac{d^2f}{dx\,dy}ab + \frac{d^2f}{dy^2}a^2}{b^3} = -\frac{2u_2}{b^3};$$

donc, en substituant, on aura

$$(2) \qquad -(y^2 + x^2)u_2 + (ax + by)(a^2 + b^2) = 0.$$

Mais l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

étant homogène, on a

$$ax + by + cz = 0,$$

et, d'après l'équation (1), on a

$$(\mathrm{A}) \qquad (y^2 + x^2)u_2 = (v_2 + w_2)z^2.$$

par suite, l'équation (2) devient

$$(v_2 + w_2)z + c(a^2 + b^2) = 0,$$

équation de degré $3(n - 1)$. En combinant cette équation avec celle de la courbe donnée, on obtient $3n(n - 1)$ points d'osculation; si le point est sur la courbe, il est visible, à cause de l'équation

$$ax + by + cz = 0,$$

que f $\frac{df}{dz}$ et $\frac{d^2f}{dz^2}$ s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$; donc la courbe représentée par l'équation (A) passe par le point donné; ce qui est évident à priori.

Note du rédacteur. Le nombre des tangentes qu'on peut mener d'un point donné à a courbe est $n(n-1)$; mais lorsque le point est sur la courbe, la tangente qui passe par ce point est la même que celle qui passe par le point consécutif, de sorte qu'en ce point deux solutions se réduisent à une seule et le nombre des tangentes est $n(n-1)-1$; de même, lorsqu'il s'agit d'un cercle osculateur, le même cercle appartient à trois points consécutifs, et trois solutions se réduisent à une seule, de sorte que le nombre de cercles osculateurs, lorsque le point est sur la courbe, est $3n(n-1)-2$. Le même genre de raisonnement s'applique à des osculations de tout ordre.