Lebesgue

Sur le rapport de l'arc à la corde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 136-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__136_1>

SUR LE RAPPORT DE L'ARC A LA CORDE;

PAR M. LEBESGUE.

Soient AOB un secteur circulaire de rayon r, et $\alpha o \beta$ un triangle isocèle, αo, βo étant pris à partir du centre sur les rayons AO, BO. On peut concevoir un nouveau secteur de même angle O (semblable), et dont l'arc soit équivalent à $\alpha\beta$, et le rayon ρ. On peut aussi concevoir un autre secteur encore d'angle O, mais dont la surface soit équivalente à $\alpha o \beta$, et le rayon ρ_1. On a, d'après cela,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\alpha\beta} = \frac{r}{\rho}, \quad \frac{\mathrm{sec\,AOB}}{\alpha o \beta} = \frac{r^2}{\rho_1^2}.$$

Si l'on appelle a la hauteur du triangle isocèle, on trouvera immédiatement

$$a\rho = \rho_1^2.$$

Si donc on savait trouver ρ et ρ_1, ou simplement ρ, on aurait le rapport de l'arc à une ligne donnée, à sa corde par exemple, à son sinus, à sa tangente, etc., et des rapports analogues pour les secteurs. Or, si l'on appelle b le côté du triangle isocèle et sa base, $\alpha\beta = 2c$. Legendre a montré que si l'angle au sommet du triangle isocèle, ainsi que sa surface, devenait moitié, on aurait

$$a' = \sqrt{a\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \qquad b' = \sqrt{ab},$$

et Schwab a montré (*voir* les *Géométries* de M. Vincent, de M. Amiot, etc.), que si l'angle au sommet devenait moitié, ainsi que la base, a et b deviendraient

$$a' = \frac{1}{2}(a+b), \qquad b' = \sqrt{b\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

Ainsi il suffirait d'opérer m bissections et d'assembler 2^m triangles isocèles pour en former un secteur polygonal de 2^m côtés (rayons non compris), et l'on pourrait prendre m assez grand pour qu'il fût permis de considérer le secteur polygonal comme un secteur circulaire de rayon ρ ou ρ_1. Ce moyen de trouver le rapport de l'arc à sa corde, et, par suite, le rapport de la circonférence au diamètre, est bien plus long que l'emploi de la formule

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5}, \ldots,$$

surtout quand on emploie l'artifice indiqué dans le Programme d'admission à l'École Polytechnique.

La méthode de Schwab pourrait conduire à la formule

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

mais bien plus longuement que la méthode des dérivées. C'est un exercice d'élimination qui n'est pas inutile.