NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Solution de la question 81

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 132-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__132_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 81

(voir t. III, p. 40),

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Chercher une courbe telle, que sa polaire, relativement à un cercle donné, soit égale à la courbe elle-même (t. III, p. 40).

Prenons le centre du cercle pour origine, x et y étant les coordonnées de la courbe cherchée, X et Y celles qui correspondent dans la polaire; on sait que $Xx + Yy = r^2$, r étant le rayon du cercle. Mais il est plus commode de prendre les coordonnés polaires, ce qui donne

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

l'équation de la courbe cherchée devenant

$$\rho = f(\varphi).$$

Avant d'introduire la condition que l'enveloppe des polaires soit égale à la courbe cherchée, nous allons considérer cette fonction comme quelconque, et l'équation de la courbe enveloppe sera

$$R = F(\omega),$$

F devant être déterminé d'après f. Alors on a

$$X = R\cos\omega, \quad Y = R\sin\omega,$$

et l'équation de chaque polaire devient

$$R\rho(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi) = r^2,$$

c'est-à-dire

$$R\rho\cos(\varphi - \omega) = r^2.$$

Comme cette équation correspond à deux valeurs consécutives de ρ et de φ, pour chaque valeur de R et de ω, il faut la différentier par rapport à ρ et à φ, et comme

$$\rho = \frac{r^2}{R\cos(\varphi - \omega)},$$

on a

$$\frac{R\,d\rho}{r^2} = -\frac{d\cos(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{\sin(\varphi - \omega)\,d\varphi}{\cos^2(\varphi - \omega)};$$

on peut, dans cette équation, poser $\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho'$, et remplacer $\cos(\varphi - \omega)$ par sa valeur, ce qui donnera

$$\cos(\varphi - \omega) = \frac{r^2}{R\rho}$$

et

$$\sin(\varphi - \omega) = \frac{r^2\rho'}{R\rho^2}.$$

Cela suffit pour déterminer F dans le cas général, car la valeur du cosinus donne φ en fonction de R, de ω et de r^2, celle du sinus donne ρ de la même manière, puisque $\rho' = f'(\varphi)$, et ces valeurs, transportées dans $\rho = f(\varphi)$, donnent la relation cherchée entre R et ω.

Mais, au lieu de poser

$$\mathrm{R} = \mathrm{F}(\omega),$$

posons

$$\mathrm{R} = \mathrm{F}(\alpha - \omega)$$

(ce qui est permis puisque F indique n'importe quelle fonction), α étant un angle constant, et ω, comme ci-dessus, l'angle que R forme avec l'axe. On a aussi

$$\mathrm{R} = \frac{r^2}{\rho \cos(\varphi - \omega)},$$

et différentiant par rapport à R et ω, il vient

$$\frac{\rho\, d\mathrm{R}}{r^2} = -\frac{d\cos(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{\sin(\varphi - \omega)\, d(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)}$$
$$= \frac{\sin(\varphi - \omega)\, d(\alpha - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)}.$$

On voit donc que

$$\frac{\mathrm{R}\, d\rho}{d\varphi} = \frac{r^2 \sin(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{d(\alpha - \omega)}{\rho\, d\mathrm{R}},$$

et

$$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} = \frac{\mathrm{F}'(\alpha - \omega)}{\mathrm{F}(\alpha - \omega)}.$$

Ce résultat est intéressant par lui-même, mais revenons à la question, et supposons que la polaire ne soit autre chose que la courbe primitive qui a tourné d'un angle α; les fonctions f et F seront les mêmes, et, par conséquent,

$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}$ sera constant. Posons donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \mathrm{C}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \mathrm{C}\,d\varphi,$$

il en résulte

$$\log \rho = \mathrm{C}\varphi + \mathrm{C}_1 \quad \text{et} \quad \rho = e^{\mathrm{C}\varphi + \mathrm{C}_1},$$

ce qui représente une *spirale logarithmique* dont on sait que la développée jouit d'une propriété analogue.

On verra, dans un prochain article, par une méthode appliquée à l'hélice conique, que cette polaire de la spirale logarithmique n'est pas toujours identique à la proposée. Soit

$$\rho = me^{\cot\beta.\varphi}$$

l'équation de la spirale donnée, β étant l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur; l'équation de la polaire sera

$$\mathrm{R} = -\frac{r^2}{m\sin\beta}\,e^{\cot\beta.(90+\beta\omega)}.$$

Donc les deux courbes seront toujours semblables, mais, pour qu'elles soient identiques, sauf la position, il faudra que l'on ait

$$r^2 = m^2 \sin\beta.$$

C'est donc par erreur qu'on a mis pour équation de la courbe cherchée,

$$\rho = \operatorname{tang}\varphi.$$

Note. M. Gennochi (Angelo) fait observer qu'on a peut-être confondu $\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ avec $\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, équation de la parabole apollonienne, car on peut choisir le cercle directeur, de manière que la polaire réciproque d'une parabole soit une parabole égale. Cette propriété appartient même aux paraboles et aux hyperboles de tous les ordres. En effet, si

$$y^n = px^m$$

est l'équation de la courbe donnée, et

$$x^2 + y^2 = r^2$$

celle du cercle directeur, on trouve sans peine que la polaire réciproque est

$$p\left(\frac{-y}{n}\right)^n = \left(\frac{m-n}{r^2}\right)^{m-n}\left(\frac{x}{m}\right)^m,$$

qui peut se réduire à l'équation de la courbe donnée par une détermination convenable de r.