NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON

De la valeur du rayon de courbure d'une courbe algébrique en un point d'inflexion ou de rebroussement

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 127-132

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__127_0>

DE LA VALEUR DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EN UN POINT D'INFLEXION OU DE REBROUSSEMENT ;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Le rayon de courbure d'une courbe algébrique en un point d'inflexion ou de rebroussement est, en général, nul ou infini. Toutefois, dans le cas d'un point de rebroussement de seconde espèce, la valeur de ce rayon peut ne pas être nulle ni infinie. Ces circonstances méritent d'être examinées avec soin, et les notions qui se rattachent à cet ordre de considérations sont susceptibles d'applications importantes. Par exemple, la possibilité d'obtenir au foyer des télescopes des images suffisamment claires tient essentiellement à ce que les rayons de courbure des caustiques sont nuls en leurs points de rebroussement.

Points d'inflexion. Supposons que l'on ait pris pour axes des x et des y la tangente et la normale à la courbe au point que l'on considère. L'équation de celle-ci pourra être mise sous la forme

$$y = x^{\alpha} v,$$

α étant un nombre, et v une fonction de x, rationnelle ou non, qui ne devient pas nulle pour $x = 0$. Quant à l'exposant α, nous le mettrons sous la forme $\frac{m}{n}$, m et n étant deux entiers positifs premiers entre eux. On voit immédiatement que si m et n sont impairs, y change de signe avec x, et ne cesse pas d'être réel. D'un autre côté, on a

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha - 1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx};$$

d'où il résulte que si α est plus grand que 1, ou $m > n$, le premier terme de $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = 0$. Si nous admettons en même temps que $\frac{dv}{dx}$ ne devient pas infini pour $x = 0$, ou plutôt que $x^{\alpha}\frac{dv}{dx}$ devient nul, l'origine des coordonnées sera bien un point d'inflexion de la courbe, dans les conditions mêmes que nous avons supposées.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v + 2\alpha x^{\alpha - 1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2};$$

et, par conséquent, la valeur du rayon de courbure, donnée, comme on sait, par l'expression

$$\pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

devient

$$\frac{\left[1 + \left(\alpha x^{\alpha - 1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v + 2\alpha x^{\alpha - 1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2}}.$$

Comme on peut toujours prendre les x positifs du côté où l'ordonnée y est positive, et conséquemment $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$, je ne me préoccupe pas du double signe. Cela posé, pour toutes les valeurs de α plus grandes que 2, le dénominateur sera nul pour $x = 0$, et le numérateur se réduira à l'unité, pourvu toutefois que $x^\alpha \frac{d^2 v}{dx^2}$ devienne nul, ce que nous admettons. Donc le rayon de courbure est alors infini.

Pour les valeurs de α comprises entre 1 et 2, le numérateur se réduit à l'unité; mais le dénominateur devient infini à cause du terme $\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v$. Le rayon de courbure est donc alors égal à zéro.

$\alpha = 2$ ne donne pas de point d'inflexion, car l'équation de la courbe est $y = x^2 v$, et y conserve le même signe lorsque x passe du positif au négatif.

Nous voyons par là que le nombre des cas où le rayon de courbure est nul est fort petit relativement à ceux où ce rayon est infini, puisque les premiers n'ont lieu que pour des valeurs de α comprises entre 1 et 2, tandis que les autres correspondent aux valeurs de α plus grandes que 2.

Points de rebroussement. Prenons encore pour axes des x et des y la tangente et la normale; l'équation de la courbe pourra être mise sous la forme

$$y = u + x^\alpha v,$$

u étant la demi-somme des ordonnées des deux branches correspondant à une même abscisse, et v une fonction de x, rationnelle ou non, telle que $x^\alpha \frac{dv}{dx}$ et $x^\alpha \frac{d^2 v}{dx^2}$ deviennent nuls pour $x = 0$; on a en même temps $\frac{du}{dx} = 0$. Il y aura rebroussement si $x^\alpha v$ devient imaginaire pour des valeurs négatives de x, et admet deux valeurs réelles et de signes contraires pour des valeurs positives de x. On satisfait à cette double condition en prenant $\alpha = \frac{m}{2n}$, m et $2n$ étant premiers entre eux. Il faut d'ailleurs que l'on ait $\alpha > 1$, sans quoi $\frac{dy}{dx}$ ne serait pas nul pour $x = 0$.

Cela posé, nous aurons pour la valeur du rayon de courbure

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{du}{dx} + \alpha x^{\alpha - 1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v + 2\alpha x^{\alpha - 1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2}}.$$

$\frac{d^2 u}{dx^2}$ est, pour $x = 0$, la valeur inverse du rayon de courbure de la courbe, lieu des points milieux des cordes parallèles à l'axe des y. Quand cette valeur est nulle, le rebroussement est de *première espèce*. Dans le cas contraire, le rebroussement est de *seconde espèce*.

Dans le premier cas, le rayon de courbure de la courbe proposée est infini pour $\alpha > 2$, car le dénominateur est alors nul, et le numérateur se réduit à l'unité. Pour α compris entre 1 et 2, le rayon de courbure est nul, car le dénominateur devient infini à cause du terme

$$\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v$$

$\alpha = 2$ ne donne pas de point de rebroussement.

On peut donc dire que, dans le plus grand nombre de cas, le rayon de courbure en un point de rebroussement de première espèce est infini.

Quand le rebroussement est de seconde espèce, le rayon de courbure se réduit à $\frac{1}{\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)}$ pour $\alpha > 2$, et il est nul pour α compris entre 1 et 2. Ainsi donc, le rayon de courbure en un point de rebroussement de seconde espèce est, le plus généralement, différent de zéro, sans être infini.

Je terminerai en faisant remarquer que ces points de rebroussement peuvent être divisés en deux classes, la première correspondant au cas où le point correspondant de la développée est un point d'inflexion, et la seconde à celui où ce point est lui-même de rebroussement. Il y a inflexion quand le coefficient différentiel du rayon de courbure n'est pas nul pour $x = 0$, et rebroussement quand ce coefficient différentiel s'annule.

Or, le coefficient différentiel de l'expression générale du rayon de courbure est

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 3\,\frac{dy}{dx} - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \right\}.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = 0$, nous n'avons à considérer que $-\frac{\left(\frac{dy^3}{dx^3}\right]}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}$. Or,

$$\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,x^{\alpha-3}\,v + 3\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\frac{dv}{dx} + 3\alpha x^{\alpha-1}\frac{d^2v}{dx^2} + x^{\alpha}\frac{d^3v}{dx^3},$$

et nous voyons que pour $\alpha > 3$, les quatre derniers termes s'évanouissent pour $x = 0$, pourvu que $\frac{d^3v}{dx^3}$ ne puisse devenir infini; ce que nous admettons ici. D'un autre côté,

9.

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{d^2 u}{dx^2}$, donc le cas le plus général est celui d'un point d'inflexion. Pour $\alpha < 3$, le terme

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha - 3}v$$

devient infini lorsqu'on fait $x = 0$; donc alors le rayon de courbure est un maximum ou un minimum, et l'on a, dans la développée, un point de rebroussement.

Pour compléter cette discussion, il faudrait examiner divers cas particuliers, mais cela nous mènerait trop loin : je laisse ce soin au lecteur.