H. Rochette

Solution de la question 283

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 119-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__119_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 283

(voir t. XII, p. 443);

PAR M. H. ROCHETTE, S. J.,

de la maison ecclésiastique de Vals, près Le Puy.

Lemme. Lorsque deux triangles ont même base, la droite qui joint leurs sommets est parallèle à celle qui joint leurs centres de gravité.

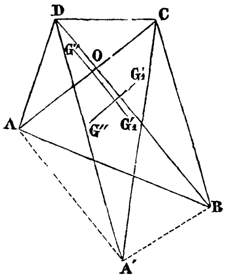
Soient ABC, A'BC deux triangles ayant même base; si nous désignons par G et G' leurs centres de gravité, par h et h' les perpendiculaires abaissées des points G et G' sur la droite AA', nous avons, d'après une propriété connue (*) (*voir* BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 2e édition, n° 35, 1°)

$$h = \frac{h_1 + h'_1}{3}, \qquad h' = \frac{h_1 + h'_1}{3},$$

h_1 et h'_1 étant les perpendiculaires abaissées des points B et C sur AA'. Donc $h = h'$ et AA' est parallèle à GG'.

Dans un quadrilatère plan, trois fois l'aire du triangle formé par le centre de gravité du quadrilatère comme sommet, et un côté A du quadrilatère comme base, plus l'aire du triangle formé par l'intersection des deux diagonales comme sommet, et le côté opposé à A comme base, est égale à l'aire du quadrilatère. (MÖBIUS.)

(*) Cette propriété se démontre aussi très-simplement d'une manière élémentaire.



Soient ABCD le quadrilatère donné, AB le côté désigné par A, et G le centre de gravité du quadrilatère à l'intersection des deux droites $G'G''$, $G_1 G'$, qui joignent les centres de gravité G', G'', G_1, G'_1 des triangles BCD, ABD, ABC, ADC.

Construisons par la pensée le triangle qui a le côté DC pour base et même centre de gravité que le quadrilatère. Les lignes qui joignent le sommet O' de ce triangle aux points A et B sont respectivement parallèles (*Lemme*) aux droites $G_1 G'_1$ et $G' G$, et, par conséquent, aux droites BO et AO. Le quadrilatère AOBO' est donc un parallélogramme, et la perpendiculaire abaissée du point O' sur AB égale la perpendiculaire h abaissée du point O sur AB.

Désignons par H la perpendiculaire abaissée du point G sur AB, et par h' et h'' les perpendiculaires abaissées des points D et C sur cette même droite. Nous aurons (*voir* Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, numéro déjà cité)

$$H = \frac{h' + h'' - h}{3},$$

d'où, si nous représentons par T, T', T'', T'', T^{IV} les triangles GAB, ABC, ABD, ABO, ODC,

$$3\,T = T' + T'' - T''',$$

ou bien

$$3\,T + T^{IV} = \text{surface du quadrilatère.}$$ C. Q. F. D.

M. Genocchi (Angelo) donne une solution analogue.