NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorie analytique des faisceaux plans

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 90-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__90_1>

THÉORIE ANALYTIQUE DES FAISCEAUX PLANS.

Rapports composés fasciculaires plans.

1. Écrivons un système de $2n$ équations représentant un faisceau plan de $2n$ rayons, savoir :

$$y-\beta=a_1(x-\alpha),\quad y-\beta=a_2(x-\alpha),\ldots,$$
$$y-\beta=a_{2n}(x-\alpha).$$

Considérons les $2n$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ comme les $2n$ racines d'une équation, et formons, avec ces quantités, un rapport segmentaire composé (page 29). Ce rapport est dit rapport composé du faisceau, ou *rapport fasciculaire,* et il y a autant de ces rapports qu'on peut former de rapports composés segmentaires avec $2n$ quantités (*voir* tome VI, page 68).

Observation. Par l'origine menons des droites parallèles aux rayons du faisceau. Les équations de ces droites sont

$$y=a_1x,\quad y=a_2x,\ldots,y=a_{2n}x;$$

$x = 1$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y; les différences telles que $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, etc., sont les différences des segments interceptés par les rayons sur la parallèle. Le rapport composé fasciculaire est donc un rapport segmentaire qu'on peut convertir en rapports *triangulaires* et *sinussiques* (tome VI, page 67).

2. Théorème. *Étant donnés* $2n$ *points dans un plan et la valeur d'un rapport composé d'un faisceau qui passe par ces points, l'équation du lieu géométrique du sommet du faisceau qui passe par ces points est une ligne de degré* n *qui passe par les* $2n$ *points.*

Démonstration. Le numérateur du rapport fasciculaire est un produit de n facteurs de la forme $a_r - a_s$, et l'on a

$$a_r = \frac{\beta - y_r}{\alpha - x_r}, \quad a_s = \frac{\beta - y_s}{\alpha - x_s};$$

α, β sont les coordonnées du sommet du faisceau; x_r, y_r, etc., sont les coordonnées des points; donc

$$a_r - a_s = \frac{\alpha(y_s - y_r) + \beta(x_r - y_s) + y_r x_s - x_r y_s}{(\alpha - x_r)(\alpha - x_s)}.$$

Ainsi le numérateur est un polynôme de degré n relativement à α et β, divisé par le produit des $2n$ facteurs $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_{2n})$; il en est de même du dénominateur. L'équation du lieu cherché est donc

$$P = mQ; \tag{1}$$

P et Q sont des polynômes en α, β de degré n, et m est la valeur du rapport fasciculaire.

Si l'on prend un des points donnés pour origine, la quantité toute connue s'annule. La courbe passe donc par ce point, et par conséquent la courbe passe par les $2n$ points.

Faisant $P = 0$, $Q = 0$, l'équation (1) est satisfaite, quel que soit p; les courbes passent donc par les mêmes n^2 points. Outre les $2n$ points, les courbes ont encore en commun $n(n-2)$ points. Si les $2n$ points donnés sont sur une ligne de degré $n-1$, les $n(n-2)$ points sont sur une droite.

L'équation générale d'une courbe de degré n renferme $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients; l'équation (1) renferme $4n+1$ indéterminées, savoir les coordonnées des $2n$ points et la valeur m du rapport. On peut donc, généralement parlant, identifier l'équation (1) avec une équation donnée de degré n, tant que n est moindre que 6, et il y a des données qu'on peut prendre arbitrairement.

2. *Application.* $n = 2$. Un faisceau de quatre rayons donne les trois rapports anharmoniques directs

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}\cdot\frac{a_4 - a_2}{a_4 - a_1} = m_1, \qquad \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_3}\cdot\frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1} = m_2,$$

$$\frac{a_2 - a_1 . a_3 - a_4}{a_2 - a_4 . a_3 - a_1} = m_3,$$

$$m_2 - m_1 m_2 = 1 \qquad (\textit{Géom. sup.}, \text{ p. } 25),$$
$$m_3 - m_2 m_3 = 1,$$
$$m_1 - m_3 m_1 = 1,$$
$$- m_1 m_2 m_3 = 1.$$

Ces trois rapports sont essentiellement inégaux et racines de l'équation

$$x^3 - px^2 + (p-3)x + 1 = 0,$$

où p est la somme des rapports.

Faisant le calcul pour le premier rapport, on trouve

$$P = m_1 Q,$$

où

$$\begin{aligned}P = {} & \beta^2(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \\ & - \alpha\beta[(y_3 - y_1)(x_4 - x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 - x_1)] \\ & + \alpha^2(y_3 - y_1)(y_4 - y_2) \\ & + \beta[(x_3 - x_1)(y_4 x_2 - x_4 y_2) + (x_4 - x_2)(y_3 x_1 - x_3 y_1)] \\ & + \alpha[(y_3 - y_1)(x_4 y_2 - y_4 x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 y_1 - y_3 x_1)] \\ & + (y_3 x_1 - x_3 y_1)(y_4 x_2 - x_4 y_2).\end{aligned}$$

On déduit Q de P en changeant l'indice 1 en 2 et l'indice 2 en 1, et laissant les indices 3 et 4 tels qu'ils sont.

Les quantités telles que $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ sont les coefficients angulaires des côtés du quadrilatère, et les quantités telles que $\dfrac{y_4 x_2 - x_4 y_2}{x_4 - x_2}$ sont les coordonnées à l'origine des côtés.

Prenons pour axes deux côtés consécutifs du quadrilatère. A cet effet, faisons $x_1 = y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_3 = 0$; alors l'équation se réduit à celle-ci :

$$\begin{aligned}& m_1 x_2 x_4 \beta^2 + [m_1(x_4 y_3 - x_2 y_4) + y_3(x_2 - x_4)]\alpha\beta \\ & + (1 - m_1) y_3 y_4 \alpha^2 - m_1 x_2 x_4 y_3 \beta + (m_1 - 1) x_2 y_3 y_4 \alpha = 0.\end{aligned}$$

Faisant $\alpha = x_2$, on obtient

$$\beta = \frac{m_1 x_2 y_4 - x_2 y_3 + x_4 y_3}{m_1 x_4}.$$

Ayant ainsi un cinquième point de la conique, on peut la construire géométriquement.

Faisant $m = -1$, on a la conique correspondant à la relation harmonique. Les deux autres rapports sont 2 et $\frac{1}{2}$.

Pour la conique répondant au second rapport, on a

$$-Q = m_2 P';$$

donc

$$P = m_1 m_2 P' = - \frac{P'}{m_3}, \quad P' = m_3 P,$$

et

$$Q = - m_2 m_3 P, \quad m_1 Q = P;$$

ainsi le second rapport donne la même conique que le premier. Il en est de même du troisième rapport, résultat évident à priori.

3. *Application.* $n = 3$;

$$\frac{a_1 - a_2 . a_3 - a_4 . a_5 - a_6}{a_1 - a_4 . a_3 - a_6 . a_5 - a_2} = m_1,$$

on a

$$\begin{aligned} P = & [\alpha (y_2 - y_1) + \beta (x_1 - x_2) + (y_1 x_2 - x_2 y_1)] \\ & [\alpha (y_4 - y_3) + \beta (x_3 - x_4) + y_3 x_4 - x_3 y_4] \\ & [\alpha (y_6 - y_5) + \beta (x_5 - x_6) + y_5 x_6]. \end{aligned}$$

Changeant 2 en 4, 4 en 6, 6 en 2, et *vice versâ*, on obtient Q, et l'équation cherchée est

$$P = m_1 Q.$$

Les quantités telles que $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$, $\frac{y_1 x_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}$, etc., sont données en fonction des angles et des côtés de l'hexagone.

Si l'on prend trois rapports tels, que l'on ait les mêmes équations qu'au § 2, on démontre, comme ci-dessus, qu'à chaque rapport répond la même courbe du troisième degré. On a en tout quinze rapports; ainsi il y a cinq courbes différentes.

Fonctions d'involution et involutions.

4. Problème. *Soit l'équation*

$$y = a_n x;$$

donnant à l'indice n successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, *on obtient les équations de six droites passant* *par l'origine : quelle relation doit exister entre les six coefficients angulaires $a_1, a_2, \ldots, a_6$ pour que le faisceau soit en involution ?*

Solution. Supposons que les rayons conjugués correspondent respectivement aux coefficients a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6. La droite parallèle à l'axe des y, représentée par l'équation

$$x = \alpha,$$

coupe le faisceau en six points en involution; les trois équations relatives aux trois couples en involution sont

$$\begin{aligned} y^2 - \alpha y\,(a_1 + a_2) + a_1 a_2 \alpha^2 &= 0,\\ y^2 - \alpha y\,(a_3 + a_4) + a_3 a_4 \alpha^2 &= 0,\\ y^2 - \alpha y\,(a_5 + a_6) + a_5 a_6 \alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que les points soient en involution, le déterminant formé par les coefficients doit être nul (page 27); donc on a la relation

$$(1)\ \left\{ \begin{aligned} &a_1 a_2[a_3 + a_4 - (a_5 + a_6)] + a_3 a_4[a_5 + a_6 - (a_1 + a_2)]\\ &+ a_5 a_6[a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)] = 0. \end{aligned} \right.$$

5. Lorsque cette expression n'est pas égale à zéro, elle porte le nom de *fonction d'involution* du faisceau.

6. THÉORÈME. *Le lieu du point duquel menant six droites à six points situés dans le même plan, on forme un faisceau dont la fonction d'involution est constante, est une ligne du sixième ordre.*

Démonstration.

Notation. x_1, y_1; $x_2, y_2 \ldots$; x_6, y_6, coordon. des points fixes;
α, β, coordonnées du centre du faisceau;
m, valeur constante de la fonction d'involution.

Les équations des six rayons sont

$$y - \beta = a_1(x - \alpha), \quad y - \beta = a_2(x - \alpha), \ldots,$$
$$y - \beta = a_6(x - \alpha);$$

d'où

$$a_1 = \frac{\beta - y_1}{\alpha - x_1}, \ldots, \quad a_6 = \frac{\beta - y_6}{\alpha - x_6}.$$

Il faut substituer ces valeurs de $a_1, \ldots, a_6$ dans la fonction d'involution. Il est évident que le membre à droite de l'équation est évidemment

$$m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_6).$$

L'équation est donc du sixième degré; car le facteur en m ne se trouvant pas dans le membre à gauche, généralement parlant, aucune réduction n'est possible. Cherchons le membre à gauche, en réduisant tout au même dénominateur; faisons

$$P = (\beta - y_1)(\beta - y_2)(\beta - y_3),$$
$$P' = (\alpha - x_4)(\alpha - x_5)(\alpha - x_6);$$

alors

$$a_1 a_2 a_3 = PP'.$$

Changeant dans ce produit l'indice 3 en 4, et *vice versâ*, on aura

$$a_1 a_2 a_4;$$

on obtient de même

$$a_1 a_2 a_3 \quad \text{et} \quad a_1 a_2 a_6;$$

on a donc ainsi

$$a_1 a_2 [a_3 + a_4 - (a_5 + a_6)].$$

Augmentant dans cette expression tous les indices de deux unités, et écrivant 1 au lieu de 7 et 2 au lieu de 8, on aura

$$a_3 a_4 [a_5 + a_6 - (a_1 + a_2)];$$

de cette dernière expression on déduit de même

$$a_5 a_6 [a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)].$$

On voit facilement que les termes supérieurs au troisième degré et le terme $\alpha\beta$ disparaissant, l'équation cherchée est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}\alpha^3 + \mathrm{A}'\beta^3 + \mathrm{B}\alpha^2\beta + \mathrm{B}'\alpha\beta^2 + \mathrm{C}\alpha^2 + \mathrm{C}'\beta^2 \\ & + \mathrm{D}\alpha + \mathrm{D}'\beta + \mathrm{F} = m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)(\alpha - x_3)\ldots(\alpha - x_6), \end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = {} & y_1y_2[y_3 + y_4 - (y_5 + y_6)] + y_3y_4[y_5 + y_6 - (y_1 + y_2)] \\ & + y_5y_6[y_1 + y_2 - (y_3 + y_4)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} = {} & (x_1y_2 + x_2y_1)[y_3 + y_4 - (y_5 + y_6)] \\ & + (x_3y_4 + x_4y_3)[y_5 + y_6 - (y_1 + y_2)] \\ & + (x_5y_6 + x_6y_5)[y_1 + y_2 - (y_3 + y_4)] \\ & + y_1y_2[x_3 + x_4 - (x_5 + x_6)] + y_3y_4[x_5 + x_6 - (x_1 + x_2)] \\ & + y_5y_6[x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{C} = {} & y_1y_2y_3(x_1 + x_2 + x_3) + y_1y_2y_4(x_1 + x_2 + x_4) \\ & + y_1y_2y_5(x_1 + x_2 + x_5) + y_1y_2y_6(x_1 + x_2 + x_6) \\ & + y_3y_4y_5(x_3 + x_4 + x_5) + y_3y_4y_6(x_3 + x_4 + x_6) \\ & + y_3y_4y_1(x_3 + x_4 + x_1) + y_3y_4y_2(x_3 + x_4 + x_2) \\ & + y_5y_6y_1(x_5 + x_6 + x_1) + y_5y_6y_2(x_5 + x_6 + x_2) \\ & + y_5y_6y_3(x_5 + x_6 + x_3) + y_5y_6y_4(x_5 + x_6 + x_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D} = {} & y_1y_2(x_3 + x_4)(y_3x_3 + y_4x_4 - y_5x_5 - y_6x_6) \\ & + y_3y_4(x_5 + x_6)(y_5x_5 + y_6x_6 - y_1x_1 - y_2x_2) \\ & + y_5y_6(x_1 + x_2)(y_1x_1 + y_2x_2 - y_3x_3 - y_4x_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = {} & y_1y_2x_1x_2(y_5x_5 + y_6x_6 - y_3x_3 - y_4x_4) \\ & + y_3y_4x_3x_4(y_1x_1 + y_2x_2 - y_5x_5 - y_6x_6) \\ & + y_5y_6x_5x_6(y_3x_3 + y_4x_4 - y_1x_1 - y_2x_2). \end{aligned}$$

En changeant x en y et y en x, on déduit A′ de A, B′ de B, C′ de C, D′ de D.

On peut choisir l'origine et les axes de manière que l'on ait

$$x_1 = y_1 = 0, \quad y_3 = 0, \quad x_5 = 0;$$

alors la quantité toute connue s'annule; la courbe passe donc par le point (x_1, y_1); donc la courbe passe par les six points donnés. Si l'on fait $\alpha = x_1$, on a une équation du troisième degré en β, dont une des racines est y_1, et les deux autres racines donnent deux autres points; de même pour $\alpha = x_2$, etc. Donc, quelle que soit la valeur de m, la courbe passe par *dix-huit* mêmes points.

7. Si $m = 0$, le faisceau est en involution, et la courbe est du troisième degré passant par les six points donnés.

Réciproquement, étant donnée une courbe du troisième degré, s'il s'agit de trouver sur la courbe six points tels, qu'en les joignant à un septième point de la courbe on obtienne un faisceau en involution, il faut identifier l'équation donnée avec l'équation (1), ce qui donne *neuf* conditions pour *douze* inconnues (*).

8. Le théorème VI peut se généraliser. Prenons dans un plan $4n+2$ points, et désignons les coordonnées de ces points par x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_{4n+2}, y_{4n+2}, et d'un point (α, β) du plan menons $4n+2$ droites à ces points; les équations de ces droites sont

$$y - \beta = a_1(x - \alpha), \quad y - \beta = a_2(x - \alpha)\ldots,$$

et

$$a_p = \frac{\beta - y_p}{\alpha - x_p}.$$

Écrivons la fonction

$$\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3 + \ldots + \mathrm{M}_{4n+2} = m,$$

ou

$$\mathrm{M}_1 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n} \left[\begin{array}{c} (a_{2n+1} + a_{-n+2} \ldots) \\ + a_{3n+1} - (a_{3n+2} + a_{3n+3} \,\ldots a_{4n+2}) \end{array}\right];$$

on déduit M_2 de M_1 en ajoutant $2n-1$ à chaque indice, et lorsque la somme dépasse $4n+2$, on n'admet que le résidu de la somme divisée par $4n+2$. On déduit de même M_3 de M_2, et ainsi de suite; m est un nombre donné.

(*) *Voir* CAYLEY, *Journal de Mathématiques*, tome IX

Remplaçant dans cette fonction a_1, a_2, etc., par leurs valeurs en α, β, x_1, y_1, etc., on obtient une équation dont le membre à droite est évidemment

$$m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_{4n+2}),$$

et par conséquent de degré $4n + 2$; mais le membre à gauche est de degré $2n + 1$, et lorsque $m = 0$, la courbe est aussi de ce degré. On voit d'intuition que $(\alpha\beta)^{2n+1}$ disparaît; il est facile aussi de s'assurer que les termes $\beta^{2n+1}\alpha^n$, $\alpha^{2n+1}\beta$ s'annulent. Mais je n'ai pas encore la démonstration générale. On prouve aisément que la courbe passe par les $4n + 2$ points.

9. Les propriétés segmentaires de ce genre qui appartiennent aux courbes de degré n, appartiennent aussi aux courbes de degré inférieur; par conséquent, une courbe du troisième degré peut se décomposer en un système d'une courbe du deuxième degré et d'une droite.