

HOUSEL

**Division pratique de la circonférence  
en parties égales**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 77-80

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__77_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



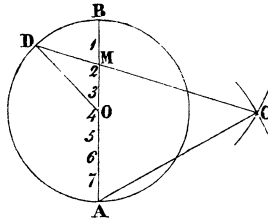
---

**DIVISION PRATIQUE DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES  
ÉGALES;**

PAR M. HOUSEL,  
Professeur.

---

On trouve, dans le *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques*, par BION, page 22 [4<sup>e</sup> édit., Paris, 1752 (\*)], la règle pratique suivante pour diviser une circonférence en un nombre  $n$  de parties égales : Divisez le diamètre AB en autant de parties égales qu'on veut en avoir sur la circonférence; des points A et B comme centres, et avec AB comme rayon, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent en C, puis joignez le point C à la seconde division du diamètre; cette ligne prolongée ira couper la circonférence en D, et BD sera la portion demandée de la circonférence.



Dans la figure, on a pris  $n = 8$ .

Mais il est important de savoir quelle approximation donne ce procédé, et c'est ce que nous allons chercher.

Posons

$$AMC = \alpha, \quad ACM = \epsilon \quad \text{et} \quad DOB = \gamma.$$

---

(\*) Beaucoup de ces instruments ont été changés et très-perfectionnés, d'autres ne sont plus en usage. Un nouvel ouvrage de ce genre serait une excellente acquisition pour les mathématiques appliquées M. Schneitler a publié un tel ouvrage à Leipsig; la 2<sup>e</sup> édition est de 1852. Tm.

(. 78 )

Dans le triangle MCA, on a la proportion

$$\sin \alpha : \sin \epsilon :: 2R : 2R - 2 \cdot \frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

car

$$AC \Leftarrow 2R = AB,$$

et d'ailleurs

$$\epsilon = 120 - \alpha.$$

Ensuite, comme DMO = 180 -  $\alpha$ , le triangle DMO donne

$$\sin \alpha : \sin (\alpha - \gamma) :: R : R - 2 \frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

On a donc

$$\sin \alpha : \sin (120 - \alpha) :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

et

$$\sin \alpha : \sin (\alpha - \gamma) :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

En divisant chaque équation par  $\sin \alpha$ . On a d'abord

$$1 : \sin 120 \cot \alpha - \cos 120 :: 1 : 1 - \frac{2}{n}.$$

Or

$$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos 120 = -\frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \cot \alpha + 1}{2} = \frac{n - 2}{2},$$

et

$$\sqrt{3} \cot \alpha = \frac{2n - 4}{n} - 1 = \frac{n - 4}{n}; \quad \cot \alpha = \frac{n - 4}{n\sqrt{3}}.$$

Ensuite

$$1 : \cos \gamma - \sin \gamma \cot \alpha :: 1 : 1 - \frac{4}{n},$$

ce qui donne

$$\cos \gamma - \frac{\sin \gamma (n-4)}{n\sqrt{2}} = \frac{n-4}{n}.$$

Soit  $\cos \gamma = x$ ; on a

$$\frac{(1-x^2)(n-4)^2}{3n^2} = \frac{(n-4)^2}{n^2} + x^2 - \frac{2x(n-4)}{n},$$

$$x^2 \left[ 1 + \frac{(n-4)^2}{3n^2} \right] - \frac{2x(n-4)}{n} + \frac{2(n-4)^2}{3n^2} = 0;$$

d'où

$$x^2 [3n^2 + (n-4)^2] - 6n(n-4)x + 2(n-4)^2 = 0,$$

et enfin

$$x = (n-4) \cdot \frac{3n + \sqrt{n^2 + 16(n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2}.$$

On rejette le signe — qui donnerait des cosinus négatifs dans les valeurs de  $n$  suffisamment petites.

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs approximatives aux valeurs exactes :

Différences.

o	$n = 3,$	exact.	
o	$n = 4,$	exact.	
— 5' 48"	$n = 5, \gamma = 71^{\circ} 57' 12''$	au lieu de $72^{\circ},$	
o	$n = 6,$	exact.	
5' 22	$n = 7, \gamma = 51.31.5$	au lieu de $51.25' 43'',$	
11.14	$n = 8, \gamma = 45.11.14$	<i>id.</i>	45,
16.40	$n = 9, \gamma = 40.16.40$	<i>id.</i>	40,
21.24	$n = 10, \gamma = 36.21.24$	<i>id.</i>	36,
25.14	$n = 11, \gamma = 33.8.52$	<i>id.</i>	32.43.38,
29.45	$n = 12, \gamma = 30.29.45$	<i>id.</i>	30,
31.58	$n = 13, \gamma = 28.12.30$	<i>id.</i>	27.41.32,
32.56	$n = 14, \gamma = 26.15.48$	<i>id.</i>	25.42.52,
34.30	$n = 15, \gamma = 24.34.30$	<i>id.</i>	24,
35.54	$n = 16, \gamma = 23.5.54$	<i>id.</i>	22.30,
36.37	$n = 17, \gamma = 21.47.12$	<i>id.</i>	21.10.35.

Les différences augmentent comme on devait s'y attendre, mais très-lentement.

Le calcul a été poussé jusqu'au polygone de dix-sept côtés que l'on sait maintenant inscrire exactement ; mais la construction qui résulterait des calculs de M. Gauss serait tellement pénible, que cette approximation vaudrait encore mieux dans la pratique (\*).

---