NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GARLIN

Solution des questions 258 et 259

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 70-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__70_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 258 ET 259

(voir t XI, p. 358),

PAR M. GARLIN,

Ancien elève de l'Ecole Normale, professeur au lycée de Lyon

---

1. Étant données deux surfaces du second ordre, concentriques et de mêmes axes, qui s'entrecoupent, trouver l'aire du cône ayant le centre pour sommet et la courbe de l'intersection pour base.

2. Exprimer, par des intégrales abéliennes, la longueur d'un arc de la courbe de l'intersection. (STREBOR.)

Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

(*) Le theorème subsiste pour un polygone plan quelconque, en considerant chaque côté comme representant une force, en grandeur et en direction, et appliquant le theorème des moments. TM les équations des deux surfaces. Si on les retranche l'une de l'autre, on obtient

$$(3) \qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c'^2}\right)=0;$$

équation d'un cône ayant pour sommet le centre commun des deux surfaces, et pour base la courbe de leur intersection. Pour rectifier cette dernière courbe et pour obtenir l'aire du cône, nous prendrons pour variable la longueur u de la génératrice de ce cône, en sorte que

$$(4) \qquad u^2=x^2+y^2+z^2.$$

Nous supposerons que les deux surfaces soient des ellipsoïdes, rien n'étant plus aisé que de voir les modifications à introduire quand une de ces surfaces ou toutes les deux deviennent des hyperboloïdes.

Si entre les équations (1) et (2) on élimine successivement x^2, y^2 et z^2, on trouve, pour les projections de la base du cône sur les plans coordonnés,

$$(5) \qquad y^2\,\frac{a^2b'^2-b^2a'^2}{b^2b'^2}+z^2\,\frac{a^2c'^2-c^2a'^2}{c^2c'^2}=a^2-a'^2,$$

$$(6) \qquad x^2\,\frac{b^2a'^2-a^2b'^2}{a^2a'^2}+z^2\,\frac{b^2c'^2-c^2b'^2}{c^2c'^2}=b^2-b'^2,$$

$$(7) \qquad x^2\,\frac{c^2a'^2-a^2c'^2}{a^2a'^2}+y^2\,\frac{c^2b'^2-b^2c'^2}{b^2b'^2}=c^2-c'^2.$$

On peut remarquer que ces équations représentent des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux axes coordonnés. Par conséquent, les questions proposées reviennent à trouver la longueur de l'arc de courbe résultant de l'intersection de ces cylindres, et l'aire du cône ayant cette courbe pour base et l'origine des coordonnées pour sommet.

Les coordonnées des points d'intersection de la base du cône avec les plans coordonnés sont données par les équations suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = \dfrac{a^2 a'^2 (c^2 - c'^2)}{c^2 a'^2 - a^2 c'^2}, \\ z^2 = \dfrac{c^2 c'^2 (a'^2 - a^2)}{c^2 a'^2 - a^2 c'^2}; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = \dfrac{b^2 b'^2 (c^2 - c'^2)}{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}, \\ z^2 = \dfrac{c^2 c'^2 (b'^2 - b^2)}{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 = \dfrac{a^2 a'^2 (b^2 - b'^2)}{b^2 a'^2 - a^2 b'^2}, \\ y^2 = \dfrac{b^2 b'^2 (a'^2 - a^2)}{b^2 a'^2 - a^2 b'^2}. \end{cases}$$

Pour que les valeurs (8) soient réelles, il faut et il suffit qu'on ait

$$c > c' \quad \text{et} \quad a' > a;$$

car alors on a

$$ca' > ac',$$

et, par conséquent, le dénominateur est toujours positif.

D'après ces deux inégalités, la réalité des valeurs (9) n'entraîne que la nouvelle condition $b' > b$.

Dès lors, il est facile de voir que les valeurs (10) sont toujours imaginaires. En effet, d'après les conditions ci-dessus, on peut avoir indifféremment

$$ba' > ab' \quad \text{ou} \quad ba' < ab'.$$

Or, si $ba' > ab'$, comme $b < b'$, la valeur de x est imaginaire. Si, au contraire, $ba' < ab'$, comme $a' > a$, c'est y qui est imaginaire. Donc, pour que les deux surfaces du second ordre se rencontrent, il faut et il suffit que leurs axes satisfassent aux inégalités

$$a < a', \quad b < b', \quad c > c'.$$

D'après la discussion précédente, on reconnaît que la base du cône est symétrique par rapport aux deux plans principaux passant par l'axe des z ; cette courbe à double courbure a quatre sommets qui sont les points où elle rencontre les plans XZ et YZ. Cette courbe se compose ainsi de quatre branches identiques, et, par conséquent, pour les questions que nous avons à résoudre, il suffit de considérer une de ces quatre branches et de quadrupler ensuite.

En cherchant par la méthode ordinaire le maximum et le minimum de la valeur de u donnée par l'équation (4), en se rappelant que les variables x, y, z sont liées par les équations (1) et (2), on trouve que les valeurs maxima et minima correspondent aux rayons vecteurs des deux sommets d'une de ces branches. Ces valeurs, commodes à calculer, sont précisément les limites des intégrales que nous allons chercher maintenant.

Occupons-nous d'abord de la rectification de la base du cône. Les équations (1), (2) et (4) donnent les valeurs suivantes de x^2, y^2, z^2 en fonction de u,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{Au^2 + B}{\delta}, \\ y^2 &= \frac{Cu^2 + D}{\delta}, \\ z^2 &= \frac{Eu^2 + F}{\delta}; \end{aligned} \right.$$

et on a les relations

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= a^2c^2b'^2(a'^2 - c'^2) + b^2c^2a'^2(c'^2 - b'^2) + a^2b^2c'^2(b'^2 - a'^2), \\ A &= a^2a'^2(c^2b'^2 - b^2c'^2), \\ B &= a^2b^2c^2a'^2(c'^2 - b'^2) + a^2a'^2b'^2c'^2(b^2 - c^2), \\ C &= b^2b'^2(a^2c'^2 - c^2a'^2), \\ D &= a^2b^2c^2b'^2(a'^2 - c'^2) + b^2a'^2b'^2c'^2(c^2 - a^2), \\ E &= c^2c'^2(b^2a'^2 - a^2b'^2), \\ F &= a^2b^2c^2c'^2(b'^2 - a'^2) + c^2a'^2b'^2c'^2(a^2 - b^2). \end{aligned} \right.$$

Les équations (11) donnent

$$dx^2 = \frac{A^2 u^2 du^2}{\delta\,(A u^2 + B)},$$

$$dy^2 = \frac{C^2 u^2 du^2}{\delta\,(C u^2 + D)},$$

$$dz^2 = \frac{E^2 u^2 du^2}{\delta\,(E u^2 + F)};$$

par suite, il vient, pour la différentielle de l'arc,

$$(13) \qquad ds = \frac{udu}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{A^2}{A u^2 + B} + \frac{C^2}{C u^2 + D} + \frac{E^2}{E u^2 + F}}.$$

En posant $u^2 = v$, cette expression devient, après que l'on a rendu le numérateur rationnel,

$$(14) \quad ds = \frac{dv}{2\sqrt{\delta}} \frac{A^2(Cv + D)(Ev + F) + C^2(Av + B)(Ev + F) + E^2(Av + B)(Cv + D)}{\sqrt{(Av + B)(Cv + D)(Ev + F)[A^2(Cv + D)(Ev + F) + C^2(Av + B)(Ev + F) + E^2(Av + B)(Cv + D)]}}.$$

Comme le polynôme que couvre le radical est d'un degré supérieur au quatrième, la rectification de la courbe gauche suivant laquelle se coupent les deux surfaces du second ordre dépend des fonctions abéliennes.

Avant d'aller plus loin, considérons le cas particulier où les deux surfaces sont de révolution autour de OZ, c'est-à-dire celui où l'on a

$$a = b, \quad a' = b'.$$

Alors les cylindres (5) et (6) se réduisent aux plans

$$(15)\qquad z = \pm cc' \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2c'^2 - c^2a'^2}},$$

parallèles à XY; le radical du second membre est réel, d'après les conditions établies entre les axes des deux surfaces. Ainsi la courbe d'intersection est un des parallèles donnés par l'équation (15); le rayon de ces cercles est

$$aa' \sqrt{\frac{c^2 - c'^2}{c^2a'^2 - a^2c'^2}},$$

valeur réelle. La question est donc ramenée dans ce cas à trouver la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon connu, ce qu'on sait faire. D'ailleurs, le cône considéré étant de révolution, la génératrice u est constante, et, par conséquent, on ne peut pas la prendre pour variable, comme nous l'avons fait dans le cas général. La formule (13) est effectivement illusoire.

L'aire conique est facile à calculer d'après ce qui précède. En effet, en représentant par $d\sigma$ l'aire du triangle infinitésimal formé par deux génératrices consécutives et par l'élément de la base du cône, on a

$$d\sigma = ds.\frac{u \sin\theta}{2},$$

θ étant l'angle du rayon vecteur u avec la tangente à la base du cône. Or

$$\cos\theta = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{u\,ds} = \frac{du}{ds};$$

donc

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{du^2}{ds^2}} = \frac{1}{ds}\sqrt{ds^2 - du^2};$$

par suite

$$d\sigma = \frac{u}{2}\sqrt{ds^2 - du^2}.$$

D'après la formule (13), il vient

$$d\sigma = \frac{udu}{2}\sqrt{\frac{u^2}{\delta}\left(\frac{A^2}{Au^2+B} + \frac{C^2}{Cu^2+D} + \frac{E^2}{Eu^2+F}\right) - 1}.$$

Posant $u^2 = v$ et réduisant au même dénominateur, on a

$$d\sigma = \frac{dv}{4\sqrt{\delta}}\sqrt{\frac{v\left[A^2(Cv+D)(Ev+F) + C^2(Av+B)(Ev+F) + E^2(Av+B)(Cv+D)\right] - \delta(Av+B)(Cv+D)(Ev+F)}{(Av+B)(Cv+D)(Ev+F)}}.$$

Si l'on rend le numérateur rationnel, le polynôme sous le radical se trouve du sixième degré, et, par conséquent, la quadrature de la surface conique dépend des fonctions ultra-elliptiques.

Quand les deux surfaces sont de révolution, le cône est aussi de révolution, et, par suite, on connaît son aire.