NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Théorème sur le mouvement d'un triangle dans un plan

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 68-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__68_0>

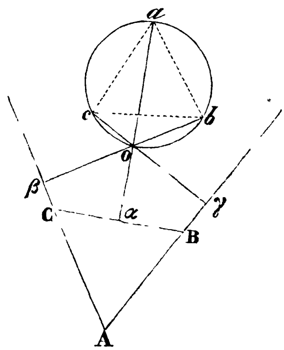
THÉORÈME SUR LE MOUVEMENT D'UN TRIANGLE DANS UN PLAN;

PAR M. SERRET (PAUL),
Professeur.

THÉORÈME. *Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle* ABC *qui se meut d'une manière quelconque dans son plan, mais sans varier de forme ni de grandeur; à une époque quelconque du mouvement, soient $f_{(a)}$, $f_{(b)}$, $f_{(c)}$ les rayons de courbure des courbes enveloppées par les trois côtés a, b, c, respectivement aux points où ces côtés les touchent actuellement; on aura la relation*

$$a.f_{(a)} + b.f_{(b)} + c.f_{(c)} = \text{constante} = 2\,S,$$

S *désignant la surface du triangle.*



Lemme. Si les deux premiers côtés AB, AC d'un triangle donné sont constamment tangents respectivement à deux cercles donnés dont les centres sont c, b, le troisième côté BC enveloppera un troisième cercle ayant son centre en o. (BOBILIER.)

Soient, en effet, β, γ les points actuels de contact des côtés AC, AB sur leurs cercles respectifs, et soit o l'intersection des deux rayons $b\beta$, $c\gamma$, perpendiculaires aux côtés AC, AB; le point o sera, d'après un théorème connu, le centre instantané de rotation pour la position actuelle de la figure; et si l'on abaisse $o\alpha$ perpendiculaire sur CB, le point α sera le point où BC touche son enveloppe. Pour démontrer que cette enveloppe est un cercle, il me suffira de prouver que la normale $o\alpha$ va passer par un point fixe, et c'est ce qu'il est facile de voir; car, sur la ligne fixe bc, décrivons un segment capable de l'angle $180^\circ - A$, et soit α le point où la droite $o\alpha$ va couper cette circonférence, qui demeure invariable dans le mouvement du triangle; nous aurons

$$\text{angle } Co\alpha = \widehat{B}, \quad bo\alpha = \widehat{C}.$$

Donc le point a divise l'arc de cercle constant cab dans un rapport constant; donc le point a est fixe.

Par conséquent, toutes les *normales* à la courbe enveloppe du côté libre BC vont concourir en un point fixe a; donc cette courbe enveloppe est un cercle ayant le point a pour centre.

Remarque. Bobilier arrive à la même conclusion autrement et d'une manière très-élégante (*voyez* sa *Géométrie*, page 297), en prouvant que la distance $a\alpha$ reste constante; mais il ne va pas plus loin, et ne cherche pas la relation qui peut exister entre les trois rayons.

Cherchons maintenant une relation entre a, b, c et $f_{(a)}$, $f_{(b)}$, $f_{(c)}$.

Pour cela, l'aire du triangle ABC étant la différence entre la somme des aires des triangles oAC, oAB, et celle du triangle oBC, on a

$$(1) \qquad b.o\beta + c\,o\gamma - a.o\alpha = 2S.$$

En outre, le quadrilatère inscrit $ocab$ nous donne, en vertu du théorème de Ptolémée,

$$(2) \qquad ob.ac + oc.ab - oa.bc = 0.$$

Mais, le triangle *abc* étant semblable au triangle ABC à cause de l'égalité des angles, on peut remplacer dans (2) les lignes *ac*, *ab*, *bc* par leurs proportionnelles AC, AB, BC, ou b, c, a; donc on aura, à la place de (2),

$$(2') \qquad b.ob + c.oc - a.oa = 0.$$

Ajoutant (1) et (2') membre à membre, il vient

$$b.b\beta + c.c\gamma - a.a\alpha = 2S;$$

ou bien, en prenant convenablement les signes,

$$a.f_{(a)} + b.f_{(b)} + c.f_{(c)} = 2S. \qquad \text{C. Q. F. D (*)}$$