

JOSEPH SACCHI

## **Solution de la question 274**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 462-464

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_462\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__462_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTION DE LA QUESTION 274**

( voir p. 259 );

PAR M. JOSEPH SACCHI,  
Professeur à Pavie.

---

1. Soient

$$A_r x + B_r y + C_r z = D,$$

le  $r^{\text{ième}}$  plan donné, et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \omega$$

le plan mobile P, les coordonnées sont rectangulaires; la

condition  $\sum_1^n \alpha, \cos \alpha, = h$  constante deviendra

$$\sum_1^n a_r \frac{\alpha A_r + \beta B_r + \gamma C_r}{R \cdot R_1} = h,$$

ou bien

$$\frac{p\alpha + q\beta + m\gamma}{R} = h,$$

où

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad R_1 = \sqrt{A_r^2 + B_r^2 + C_r^2},$$

$$p = \sum_1^n \frac{a_r A_r}{R_1}, \quad q = \sum_1^n \frac{a_r B_r}{R_1}, \quad m = \sum_1^n \frac{a_r C_r}{R_1}.$$

Cette équation équivaut à

$$\frac{\alpha \frac{p}{m} + \beta \frac{q}{m} + \gamma}{R \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \frac{q^2}{m^2} + 1}} = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

ou bien

$$(1) \quad \sin (P, D) = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

où D représente la droite qui a pour équations

$$x = \frac{p}{m} z, \quad y = \frac{q}{m} z.$$

Donc le plan mobile forme un angle constant avec la droite D, et si dans son mouvement il se maintient toujours à la même distance d'un point fixe, il engendre un cône droit ayant pour axe la parallèle à la droite D passant par le point fixe; variant  $h$ , le cône change, mais la position de l'axe est constante. Le minimum et le maximum de la valeur de  $h$ , que l'équation (1) donne, sont évidemment zéro et  $\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}$ : dans le premier cas, le cône devient un cylindre ayant le même axe que le cône; et dans le second, il se réduit au même plan mobile perpendiculaire à la droite D. Si les  $a_r$  représentaient les aires de figures placées dans les plans donnés,  $h$  serait la somme des projections des mêmes aires sur le plan mobile, et les plans tangents du susdit cône seraient les mêmes pour lesquels  $h$  est constant, et le plan perpendiculaire à la droite D celui du maximum de la somme des projections (\*).

2. Prenant pour origine des coordonnées le point fixe, l'équation du plan mobile distant de  $b$  de l'origine sera

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - bR = 0,$$

et

$$\alpha p + \beta q + \gamma m - hR = 0$$

sera la condition donnée. Si nous représentons ces équations par  $\varphi = 0$ ,  $f = 0$ , on a, pour les équations de l'enveloppe,

$$\varphi'_\alpha f'_\beta - f'_\alpha \varphi'_\beta = 0, \quad \varphi'_\gamma f'_\alpha - f'_\gamma \varphi'_\alpha = 0, \quad \varphi'_\beta f'_\gamma - f'_\beta \varphi'_\gamma = 0,$$

ou

$$\varphi'_\alpha = \frac{d\varphi}{d\alpha}, \dots$$

(\*) Plan invariable de Laplace.

Effectuant les calculs et posant

$$qx - py = E, \quad mx - pz = F, \quad my - qz = G,$$

$$bp - hx = e, \quad bq - hy = f, \quad bm - hz = g,$$

on a

$$RE = \alpha f - \beta e, \quad RF = \gamma e - \alpha g, \quad RG = \beta g - \gamma f,$$

lesquelles, carrées et sommées, donnent l'équation du cône

$$E^2 + F^2 + G^2 = e^2 + f^2 + g^2,$$

ou bien

$$(px + qy + mz - hb)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2)(p^2 + q^2 + m^2 - h^2),$$

laquelle confirme justement tout ce qu'on a dit ci-dessus.

Le cas de  $b = 0$  correspond à la question comme elle a été proposée par M. Steiner.

*Note du Rédacteur.* Ce problème se ramène à la théorie des couples en statique, et *vice versa*.