NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Note sur l'aire de la portion de sphère interceptée entre trois arcs de petit cercle

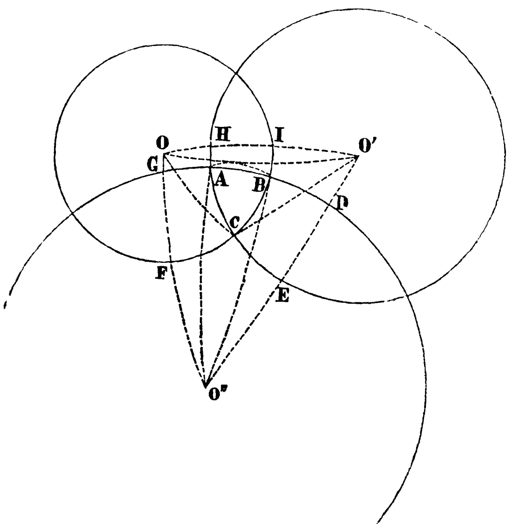
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 446-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__446_1>

NOTE SUR L'AIRE DE LA PORTION DE SPHÈRE INTERCEPTÉE ENTRE TROIS ARCS DE PETIT CERCLE (*);

PAR M. H. FAURE.

Soient O, O′, O″ les pôles des petits cercles, ρ, ρ', ρ'' leurs rayons sphériques, A, B, C le triangle formé par leur intersection. Joignons les pôles par des arcs de grands cercles, ils rencontrent les côtés du triangle ou leurs prolongements en des points D, E, F, G, H, I.



(*) Cette question a été traitée par d'Alembert, *Mémoires de Turin*; par

Désignant par T l'aire du triangle A, B, C, on a

$$T = \text{triangle } OO'O'' - (\text{secteur } OIF + \text{sect. } O'HE + \text{sect. } O''GD) + ADE + BGF + CHI.$$

Ces différentes parties sont faciles à évaluer ; l'une des dernières, telle que CHI, est la moitié de l'aire sphérique comprise entre les deux cercles O et O'. Joignant le point C aux pôles O et O' par des arcs de grand cercle, on a

$$CHI = \text{sect. } OCI + \text{sect. } O'CH - \text{triangle } OCO' ;$$

mais

$$\text{sect. } OCI = (1 - \cos \rho)\, COO',$$
$$\text{sect. } O'CH = (1 - \cos \rho')\, CO'O,$$
$$\text{triang. } OCO' = COO' + CO'O + OCO' - 180^\circ = COO' + CO'O - C,$$

C étant l'angle sous lequel se coupent les cercles O et O' ; il résulte de là

$$CHI = C - \cos \rho\, COO' - \cos \rho'\, CO'O,$$

de même

$$BGF = B - \cos \rho\, BOO'' - \cos \rho''\, BO''O,$$
$$ADE = A - \cos \rho' AO'O'' - \cos \rho''\, AO''O'.$$

D'ailleurs

$$\text{sect. } OIF = O'OO''\, (1 - \cos \rho),$$
$$\text{sect. } O'HE = OO'O''\, (1 - \cos \rho'),$$
$$\text{sect. } O''GD = OO''O'\, (1 - \cos \rho''),$$
$$\text{triangle } OO'O'' = OO'O'' + OO''O' + O'OO'' - 180^\circ ;$$

donc

$$T = A + B + C - 180^\circ - (\alpha \cos \rho + \beta \cos \rho' + \gamma \cos \rho'').$$

α, β, γ sont les angles sphériques sous lesquels les côtés du triangle ABC sont vus des trois pôles.

Bossut (*Calcul intégral*), et par M. Quetelet, *Correspondance*, tome VII, page 278 ; 1832. Tm.

On peut donner à cette expression une forme différente, en y introduisant les côtés du triangle ABC. Soient en effet a, b, c ces côtés; on voit facilement que

$$a = \alpha \sin \rho, \quad b = \beta \sin \rho', \quad c = \gamma \sin \rho'',$$

donc

$$T = A + B + C - 180^\circ - (a \operatorname{cotg} \rho + b \operatorname{cotg} \rho' + c \operatorname{cotg} \rho'').$$

Si l'on suppose

$$\rho = \rho' = \rho'' = 90^\circ,$$

on retrouve l'expression connue pour l'aire du triangle sphérique.

Si le cercle qui a O″ pour pôle vient se confondre avec le grand cercle OO′, le triangle à évaluer devient alors CHI. Il faut faire, dans la première des expressions précédentes,

$$B + C = 180^\circ, \quad \cos \rho'' = 0, \quad \alpha = COO', \quad \beta = CO'O;$$

on trouve

$$T = A - (COO' \cos \rho + CO'O \cos \rho'),$$

mais le triangle sphérique OO′C donne

$$\frac{\sin COO'}{\sin \rho'} = \frac{\sin CO'O}{\sin \rho} = \frac{\sin A}{\sin \delta} = K,$$

δ étant la distance sphérique des centres; on a donc

$$2T = 2[\operatorname{arc} \sin (K \sin \delta) - \cos \rho \operatorname{arc} \sin (K \sin \rho') \\ - \cos \rho' \operatorname{arc} \sin (K \sin \rho)].$$

C'est la forme que donne M. Townsend à l'expression de l'aire de la sphère comprise entre deux arcs de petits cercles. (Tome IX, page 364.)