Pépin

Solution de la question 275

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 441-443
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__441_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 273

(voir t. XII, p. 259) ;

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A, les sommets B et C sont sur une droite fixe : quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

Prenons pour origine le point A, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite fixe. Soit p la longueur de cette perpendiculaire AP, soit α l'angle que la droite AB fait avec l'axe des x. Les coordonnées des points B et C seront

$$\text{Pour B} \begin{cases} x' = p, \\ y' = p \operatorname{tang} \alpha; \end{cases} \qquad \text{pour C} \begin{cases} x'' = p, \\ y'' = p \operatorname{tang}(\mathrm{A} + \alpha). \end{cases}$$

Le cercle circonscrit, passant par l'origine A, aura pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Les coordonnées a et b du centre seront

$$b = \frac{p}{2}[\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang}(\mathrm{A} + \alpha)],$$

$$a = \frac{p}{2}[1 - \operatorname{tang} \alpha . \operatorname{tang}(\mathrm{A} + \alpha)],$$

et l'équation du cercle deviendra

$$x^2 + y^2 - px[1 - \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}(A + \alpha)]$$
$$- py[\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(A + \alpha)] = 0,$$

ou bien, en séparant l'arc α, et posant $\operatorname{tang} A = m$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}^2\alpha . p(x + my) - \operatorname{tang}\alpha[m(x^2 - 2px + y^2) + 2py] \\ + [(x^2 + y^2) - p(x + my)] = F(x, y, \alpha) = 0. \end{array} \right.$$

En éliminant l'angle α entre cette équation et sa dérivée

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{\cos^2\alpha} p(x + my)$$
$$- \frac{1}{\cos^2\alpha}[m(x^2 - 2px + y^2) + 2py] = 0,$$

on trouvera, pour équation de l'enveloppe,

$$[m(x^2 - 2px + y^2) + 2py]^2 - 4p(x^2 + y^2)(x + my)$$
$$+ 4p^2(x + my)^2 = 0.$$

Si, après avoir effectué les calculs indiqués et les réductions, on divise par m^2 et qu'on ait égard à la relation

$$\frac{1 + m^2}{m^2} = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 A}{\operatorname{tang}^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A},$$

on pourra mettre l'équation de l'enveloppe sous la forme suivante :

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)\left[(x^2 + y^2) - \frac{4p}{\sin^2 A} x + \frac{4p^2}{\sin^2 A}\right] = 0.$$

L'enveloppe cherchée se compose donc du point A et du cercle

$$\left(x - \frac{2p}{\sin^2 A}\right)^2 + y^2 = 4p^2 . \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}.$$

C. Q. F. D.

M. Joseph Sacchi, de Pavie, donne à peu près la même solution.

M. Bellavitis, professeur à l'Université de Padoue, fonde une solution très-courte sur la théorie des figures *dérivées*, théorie encore peu connue en France, et qui aurait besoin d'être expliquée.