SOUFFLET

Note sur les dérivées de log x et arc tang x et sur leurs développements en série

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 438-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__438_1>

NOTE SUR LES DÉRIVÉES DE LOG x ET ARC TANG x ET SUR LEURS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET,
Professeur, docteur ès sciences mathématiques.

1°. Rappelons d'abord que

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \ldots + x^{m-1},$$

m étant entier et positif. Si l'on fait $x_1 = x$, ou aura, limite de $\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou dérivée de $x^m = mx^{m-1}$. Ainsi la dérivée de x sera x^0 ou 1, celle de x^2 sera $2x$, et en général celle de ax^m sera limite de $a \times \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou max^{m-1}. Réciproquement, x_0, x, x^2, x^3, etc., *dériveront* respectivement de x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^4}{4}$.

2°. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h}, \text{ ou de } \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}, \text{ ou de } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x},$$

si l'on fait $h = \alpha x$, α et h étant infiniment petits en même temps.

Or les progressions logarithmiques

$$1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 \ldots,$$
$$0 \,.\, k\alpha \,.\, 2k\alpha \ldots,$$

donnent, par *définition*,

$$k\alpha = \log(1+\alpha),$$

quel que soit α; donc la dérivée de

$$\log x = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x};$$

puisque nous avons

$$k = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

il s'ensuit que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est la base du système logarithmique dont le module $k = 1$, et en la désignant par e, nous aurons

$$k = \log e.$$

3°. Il est évident que la dérivée de $\log(1+x)$ est $\frac{k}{1+x}$, puisque, en remplaçant $1+x$ par y, on serait ramené au cas précédent. Or, une simple division de 1 par $1+x$ donne

$$\frac{k}{1+x} = k(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$$

pour dérivée de $\log(1+x)$; donc, réciproquement,

$$\log(1+x) = k\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Du reste, on sait transformer cette série en une autre très-convergente pour une valeur quelconque de la variable plus grande que l'unité. En supposant $k = 1$, on calculera donc $l\,2$, et, par suite, $l\,4$, $l\,5$; d'où l'on déduira $l\,10$ et $\frac{1}{l\,10}$ pour valeur numérique du module k dans le système dont la base est 101. Le module une fois connu, la même série donnera les logarithmes vulgaires.

Remarque. Il semble peu naturel de définir lė nombre e par le binôme $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ considéré seul en dehors des progressions logarithmiques et de le calculer d'avance. Nous préférons la marche précédente, puisque l'on évite ainsi d'employer les séries avant les dérivées. (Voir *les Dérivées et les séries simplifiées*; chez Mallet-Bachelier.)

4°. On a

$$\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x_1 - x)}{\cos x_1 \cos x};$$

donc la dérivée de l'arc x par rapport à tang x ou la limite de $\dfrac{x_1 - x}{\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x}$ égale la limite de

$$\frac{x_1 - x}{\sin(x_1 - x)} \times \cos x_1 \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + u^2},$$

tang x étant remplacée par u.

5°. En divisant 1 par $1 + u^2$, cette dérivée devient

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \ldots.$$

Donc réciproquement l'arc tang u ou x égale

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \ldots.$$

Si l'on fait $u = \dfrac{1}{5}$, cette série donnera la valeur d'un arc α correspondant; mais

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tang} 4\alpha = \frac{120}{119},$$

et

$$\operatorname{tang}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239},$$

et si l'on pose

$$u = \frac{1}{239},$$

la série précédente donnera la valeur de

$$4\alpha - \frac{\pi}{4};$$

donc

$$4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{139},$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} - \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$