Nouvelles annales de mathématiques

Ossian Bonnet

Sur une propriété de maximum relative à la sphère

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 433-438

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__433_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE MAXIMUM RELATIVE A LA SPHÈRE;

PAR M. OSSIAN BONNET.

M. Jellett, dans le cahier du Journal de M. Liouville qui vient de paraître, a essayé de déduire, du calcul des variations, ce théorème connu : *Parmi toutes les surfaces* FERMÉES *de même contour, la sphère est celle qui comprend le plus grand volume*. Pour cela, l'habile géomètre de Dublin se propose de démontrer que la sphère est la seule surface fermée dont la courbe moyenne soit constante. La question ainsi posée paraît présenter de très-grandes difficultés; aussi M. Jellett n'a-t-il pu en venir à bout qu'en se bornant à considérer des surfaces fermées telles, que des droites, issues d'un point de leur intérieur, ne les coupent qu'en un point. Or, il me semble, tout en reconnaissant l'importance de la question traitée par M. Jellett, qu'on peut éviter ces difficultés quand il ne s'agit que d'établir la propriété de maximum relative à la sphère, et arriver simplement au but de la manière suivante.

I.

Soit A la surface fermée qui, parmi toutes celles qui ont une étendue égale à $4\pi a^2$, comprend le plus grand volume. Cette surface devra satisfaire à la condition

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{b},$$

R et R' étant les rayons de courbure principaux, et b une constante.

Mais au moyen d'un théorème démontré par M. Jellett, on voit facilement que S étant l'étendue, et V le volume de la surface A, on doit voir, par cela même, que cette surface remplit la condition (1)

$$V = \frac{b}{3} S,$$

ou bien, d'après la valeur de S,

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Cela nous montre déjà que b doit être $\overline{\gtrless} a$, car sans cela la sphère de surface $4\pi a^2$ aurait un volume $\frac{4}{3}\pi a^3$ plus grand que le volume de la surface A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

D'un autre côté, si l'on met l'équation (1) sous la forme

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{4}{b^2} - \frac{4}{RR'},$$

que l'on multiplie par l'élément dS de la surface A et qu'on intègre en étendant l'intégration à tous les éléments de la surface, il viendra

$$S \text{ ou bien } 4\pi a^2 = 4\pi b^2 + \frac{b^2}{4} \int\int \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 dS,$$

car

$$\int\int \frac{dS}{RR'} = 4\pi,$$

d'après un théorème démontré pour la première fois par M. Olinde Rodrigues dans la Correspondance de l'École Polytechnique. Donc

$$b \overline{\lessdot} a;$$

rapprochant le résultat de celui qui a été obtenu plus haut, on en conclut

$$b = a,$$

par suite

$$\int\int\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 dS = 0,$$

et enfin

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R'};$$

ce qui prouve que la surface A est une sphère.

II.

On peut établir plus simplement que ne le fait M. Jellett le théorème au moyen duquel il prouve que, pour toute surface fermée satisfaisant à l'équation (1), on a, entre le volume V et la surface S, la relation

$$V=\frac{b}{3}S.$$

En effet, soient V le volume compris dans une surface fermée quelconque A, r le rayon vecteur de cette surface issu d'un point de son intérieur, dS son élément superficiel, α l'angle de la normale extérieure avec le rayon vecteur r; on a, comme on sait,

$$3V=\int\int r\cos\alpha\, dS,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la surface.

Considérons maintenant la surface obtenue en dilatant d'une quantité infiniment petite δn la surface A; on aura de même, pour cette seconde surface,

$$3(V+\delta V)=\int\int[r\cos\alpha+\delta(r\cos\alpha)](dS+\delta dS),$$

d'où

$$3\,dV=\int\int\delta(r\cos\alpha)\,dS+\int\int r\cos\alpha\,\delta dS.$$

Or

$$\delta V = S\delta n,\quad \delta(r\cos\alpha)=\delta n,\quad \delta dS=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\delta n\, dS;$$

donc

$$2S = \int\int r \cos\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS.$$

C'est le théorème de M. Jellett.

Si, au lieu d'une surface fermée, on considérait une portion de surface A terminée à un contour fermé C, en appelant V le volume compris entre cette portion de surface et le cône qui a la courbe C pour base et l'origine des rayons vecteurs r pour sommet, on aurait encore

$$3V = \int\int r \cos\alpha\, dS,$$

puis

$$3\delta V = \int\int \delta(r\cos\alpha)\, dS + \int\int r\cos\alpha\, \delta dS,$$

et enfin

$$\delta(r\cos\alpha) = \delta n, \quad \delta dS = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \delta n\, dS;$$

mais δV ne serait pas égal à $S\delta n$, comme précédemment; cet accroissement se composerait en outre d'un petit volume qu'il est très-facile d'évaluer et que l'on trouve égal à

$$\delta n \int p\, ds,$$

ds étant l'élément du contour C, p la perpendiculaire (avec un signe) abaissée de l'origine des rayons vecteurs r, sur le plan mené par la tangente à la courbe C, normalement à la surface A, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la courbe C; de telle sorte que l'on a alors

$$2S = \int\int r\cos\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS - \int p\, ds.$$

Cette relation, plus générale que celle qui a été obtenue plus haut et qui donne une interprétation géométrique d'un autre résultat de M. Jellett, peut être utile dans différentes circonstances.

On peut d'une manière analogue déduire de l'égalité

$$(2) \qquad 2\,S = \int\!\!\int r \cos\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS,$$

un dernier théorème de M. Jellett, d'après lequel

$$2 \int\!\!\int r \cos\alpha \frac{dS}{RR'} = \int\!\!\int \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS.$$

En effet, appliquons la relation (2) à deux surfaces parallèles infiniment voisines; nous aurons

$$\begin{aligned} 2\,\delta S = & \int\!\!\int \delta(r\cos\alpha)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS \\ & - \int\!\!\int (r\cos\alpha)\left(\frac{\delta R}{R^2} + \frac{\delta R'}{R'^2}\right) dS \\ & + \int\!\!\int (r\cos\alpha)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \delta\, dS, \end{aligned}$$

ou bien, en remarquant que

$$\delta S = \delta n \int\!\!\int \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS, \qquad \delta(r\cos\alpha) = \delta n,$$

$$\delta R = \delta R' = \delta n, \qquad \delta\, dS = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \delta n\, dS,$$

il vient

$$2 \int\!\!\int (r\cos\alpha) \frac{dS}{RR'} = \int\!\!\int \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS,$$

comme il fallait le démontrer.

Je terminerai par cette remarque qui, je crois, n'a pas été faite : *Toute surface dans laquelle le produit des rayons de courbure principaux a la même valeur, est parallèle à une surface de courbure moyenne constante.* En effet, soit

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{a}$$

l'équation d'une surface à courbure moyenne constante;

si nous dilatons la surface de la quantité $\frac{a}{2}$, l'équation précédente deviendra

$$RR' = \frac{a^2}{4}.$$