NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Théorème sur le Pentagone

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 419-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__419_1>

THÉORÈME SUR LE PENTAGONE ;

PAR M. MENTION.

1. THÉORÈME. *Un pentagone donne lieu à cinq quadrilatères en prolongeant ses côtés de deux en deux ; et chaque quadrilatère a une médiane* (*). *Les cinq médianes se coupent au même point.*

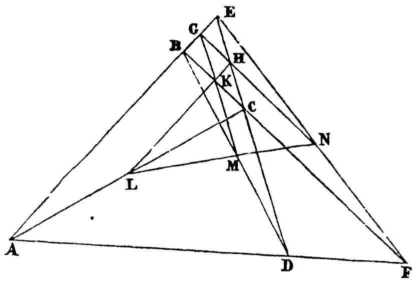
M. Terquem a demandé une démonstration du théorème dont il s'agit, indépendante de la théorie des coniques, et les *Annales* de 1847 renferment une Note de M. Paul Serret à ce sujet (page 22). Mais l'auteur fait usage des coordonnées, tandis que la géométrie pure doit suffire pour résoudre la question. Il n'est, en effet, littéralement besoin que de regarder la figure.

La méthode segmentaire que j'emploie ici exige quelque attention : il ne faut jamais prendre au hasard les triangles destinés à établir *le concours de plusieurs droites* ou *l'alignement de plusieurs points*. Par exemple, Bobilier, dans sa *Géométrie*, prouve que les trois milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite, au moyen d'une construction auxiliaire qui enlève

(*) J'appelle médiane d'un quadrilatère la droite passant par les milieux de ses diagonales.

à la démonstration une partie de sa simplicité. Cette propriété se conclut *immédiatement* du théorème de Ptolémée; je vais le montrer, parce que cela n'est pas étranger à mon objet principal.

Fig. 1.



Soit donc pris le triangle GHK (*fig.* 1), ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle BEC formé avec trois côtés du quadrilatère ABCD. Ses côtés rencontrant les diagonales aux milieux de celles-ci, on est conduit à faire voir que l'on a

$$\frac{GM}{MK} \cdot \frac{KL}{HL} \cdot \frac{HN}{GN} = 1.$$

Or les six termes du premier membre de cette égalité sont les moitiés des segments déterminés par la sécante ADF relativement au triangle BCE : ces termes seront donc assujettis à la même relation que ces segments.

2. Quant au pentagone, proposons-nous de former un triangle tel, que trois d'entre les cinq médianes aillent aboutir à ses sommets, qui pourront être trois milieux consécutifs des côtés du pentagone tracé avec les rencontres de ceux du proposé.

ABCDE (*fig.* 2) est le pentagone donné, FGHIK est le pentagone formé par les diverses rencontres des côtés du premier. Soient L, M, N les milieux des côtés IK, IH, HG. Les médianes NX, LX′, MX″ se rapportent aux quadrilatères KEDC, ABEG, AFDE; elles coupent les côtés du triangle LMN en X, X′, X″.

On doit avoir

$$\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{LX}}\cdot\frac{\mathrm{LX''}}{\mathrm{NX''}}\cdot\frac{\mathrm{NX'}}{\mathrm{MX'}}=1.$$

Soit α le milieu de KD; les lignes Lα, MX′, IG étant parallèles, j'écris les proportions

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{LX}}=\frac{\mathrm{L}\alpha}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{ID}}.$$

Soit β le milieu de AG; les lignes Nβ, MX étant parallèles, j'écris encore

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{NX'}}{\mathrm{MX'}}=\frac{\mathrm{N}\beta}{\mathrm{ML}}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{KH}}.$$

Soit δ le point d'intersection des droites MX″ et Nβ, il me vient d'abord

$$\frac{\mathrm{LX''}}{\mathrm{NX''}}=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{N}\delta}.$$

Mais le milieu γ de AD est sur MX″, et les trois lignes $\gamma\beta$, IG, MN sont parallèles; donc

$$\frac{\mathrm{N}\beta}{\delta\beta}=\frac{\gamma\beta}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{IG}};$$

d'où

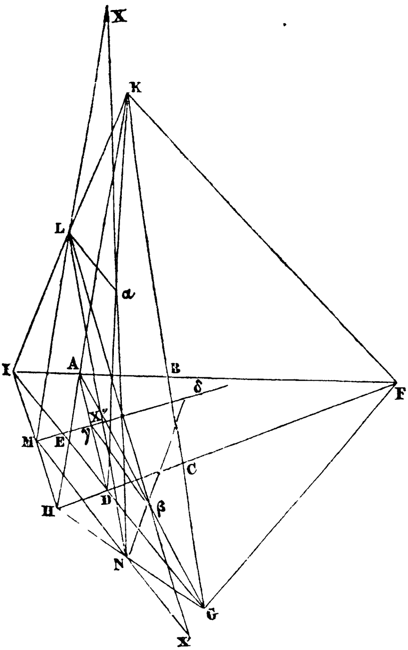
$$\frac{\mathrm{N}\delta}{\mathrm{N}\beta}=\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{ID}},$$

et

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{N}\delta}=\frac{\mathrm{ML}.\mathrm{ID}}{\mathrm{N}\beta.\mathrm{IG}}=\frac{\mathrm{HK}.\mathrm{ID}}{\mathrm{AH}.\mathrm{IG}}.$$

Conséquemment, le produit des rapports (1), (2), (3) est égal à l'unité. C. Q. F. D.

Fig. 2



Remarque. Les conditions pour que les cinq médianes soient parallèles découlent très-simplement de notre démonstration. Ainsi les deux lignes MX et NX′ seront parallèles si

$$\frac{MX}{LX} = \frac{MX'}{NX'} \quad \text{ou} \quad \frac{KH}{AH} = \frac{IG}{ID}.$$

De même,

$$\frac{KH}{KE} = \frac{IF}{IB} \cdots$$

A proprement parler, ce sont les conditions de circonscriptibilité d'un pentagone à la parabole, et, au fond, on retombe sur la propriété si connue de cette courbe, qu'une tangente quelconque intercepte sur les deux côtés d'un angle circonscrit des segments proportionnels.