NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Nouvelles propriétés géométriques et mécaniques des surfaces de niveau ; d'après M. Jacob Amsler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 356-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__356_1>

NOUVELLES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DES SURFACES DE NIVEAU;

D'APRÈS M. JACOB AMSLER,
De Halden, en Suisse.

(Journal de M. Crelle, tome XLII, page 314; 1851.)

1. Soit $f(x, y, z)$ une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z qui satisfont à l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0;$$

alors l'équation

$$f(x, y, z) = \text{constante}$$

représente un système de *surfaces de niveau*.

Soient

$$f(x, y, z) = \alpha_1, \tag{1}$$

$$f(x, y, z) = \alpha_2, \tag{2}$$

deux de ces surfaces, et p_1, q_1 deux points sur la première surface (1). Par p_1 et q_1 on fait passer deux trajectoires du système qui rencontrent la surface (2), respectivement en p_2 et q_2. Nommons p_1 et p_2 *points correspondants*; de même q_1 et q_2. On a la proposition suivante :

Théorème. *La distance de deux points quelconques des deux surfaces comme p_1 et q_2 est égale à la distance des points correspondants p_2, q_1.*

(Sans démonstration.)

Au moyen de cette propriété géométrique, on peut démontrer cette proposition de mécanique :

Théorème. *Si les surfaces* (1) *et* (2) *sont des masses homogènes, l'attraction de la masse de la surface* (1) *sur le point p_2 de la surface* (2) *peut se ramener à l'attraction que le point correspondant p_1 éprouve de la part de la masse* (2).

Soient V_1 le potentiel de l'action sur p_2, et V_2 le potentiel de l'action sur p_1 ; on aura

$$\frac{\frac{dV_1}{dx_1}f'(x_1)+\frac{dV_1}{dy_1}f'(y_1)+\frac{dV_1}{dz_1}f'(z_1)}{f'(x_1)^2+f'(y_1)^2+f'(z_1)^2} = \frac{\frac{dV_2}{dx_2}f'(x_2)+\frac{dV_2}{dy_2}f'(y_2)+\frac{dV_2}{dz_2}f'(z_2)}{f'(x_2)^2+f'(y_2)^2+f'(z_2)^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dV_1}{d\alpha_1} = \frac{dV_2}{d\alpha_2}.$$

Cette proposition a lieu pour toute loi d'attraction qui ne dépend que de la distance. C'est une généralisation du théorème d'Ivory dans la théorie de l'attraction des ellipsoïdes et de l'extension donnée à ce théorème par Poisson.

Les démonstrations sont à trouver.