

H. FAURE

## Solution de la question 167

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 34-36

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_34\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__34_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTION DE LA QUESTION 167**

( voir t. VI, p. 394 );

PAR M. H. FAURE.

On sait que le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur les tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \omega,$$

l'équation de l'hyperbole équilatère étant

$$a^2 = \rho^2 \cos 2 \omega.$$

M. W. Roberts propose de démontrer que la longueur d'un quadrant de cette podaire est égale à trois fois la différence entre l'arc infini de l'hyperbole équilatère et son asymptote.

Cette question se trouve résolue par l'auteur, dans le tome X des *Annales* de M. Liouville; il l'a déduite d'une proposition plus générale, au moyen des fonctions elliptiques. Nous allons la démontrer, en suivant une autre marche que nous appliquerons à l'équation  $a^m = \rho^m \cos m \omega$ , qui comprend l'hyperbole équilatère comme cas particulier. On reconnaît facilement la forme de cette courbe; elle se compose de  $m$  branches infinies, ayant pour asymptotes des droites qui font avec l'axe polaire des angles égaux à  $\frac{\pi}{2m}$ ,  $\frac{3\pi}{2m}$ ,  $\frac{5\pi}{2m}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{(2m-1)\pi}{2m}$ . On trouve pour équation de la première podaire,

$$\rho^{\frac{m}{m-1}} = a^{\frac{m}{m-1}} \cos \frac{m}{m-1} \omega.$$

Si l'on projette de même le centre de notre courbe sur la tangente à celle-ci, on trouvera, pour la deuxième podaire,

$$\rho^{\frac{m}{2m-1}} = a^{\frac{m}{2m-1}} \cos \frac{m}{2m-1} \omega.$$

Soit E l'excès de la longueur d'une asymptote de la courbe représentée par  $a^m = \rho^m \cos m\omega$ , sur la branche de courbe correspondante, et soit S la longueur d'une demi-boucle de la deuxième podaire. Nous allons démontrer que

$$E = \frac{m-1}{2m-1} S.$$

En effet, si l'on calcule l'arc de la podaire d'après la formule

$$S = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

on trouvera

$$S = a(2m-1) \int \frac{z^{2m-2} dz}{\sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = az^{2m-1}.$$

La même formule donne, pour l'arc de l'autre courbe,

$$S' = -a \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = \frac{a}{z}.$$

Or

$$-a \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{1-z^{2m}}} = \frac{a \sqrt{1-z^{2m}}}{2} + (m-1) a \int \frac{z^{2m-2} dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Pour avoir la différence entre deux longueurs très-considérables, portées, la première, sur l'asymptote, à partir du centre, et la seconde sur la courbe  $a^m = \rho^m \cos m\omega$ ,

à partir du sommet, il faut voir ce que devient la différence  $\rho - S$  lorsque  $\rho$  est infini, ou  $\frac{a}{z} - S'$  pour  $z = 0$ .

Or

$$\frac{a}{z} - S' = \frac{a}{z} - \frac{a\sqrt{1-z^{2m}}}{z} - (m-1)a \int \frac{z^{2m-2} dz}{\sqrt{1-z^{2m}}} = E.$$

Nos intégrales doivent être prises entre 0 et 1. Entre ces limites, les deux quantités qui précèdent le signe  $\int$  s'évanouissent; donc,

$$E = -(m-1)a \int \frac{z^{2m-2} dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Par suite, puisqu'il faut renverser les limites pour l'une ou l'autre de ces intégrales,

$$E = \frac{m-1}{2m-1} S.$$

Dans le cas particulier de la question, il faut faire

$$m = 2,$$

ce qui donne

$$E = \frac{1}{3} S, \quad \text{ou} \quad S = 3E.$$