J.-J. Sylvester

Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 329-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__329_1>

NOUVELLE MÉTHODE

Pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque;

PAR M. SYLVESTER (J.-J.),

Membre de la Société royale de Londres.

---

1. *Lemme.* Soient

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\dots,\ C_{r-1},\ C_r$$

une suite de quantités positives, assujetties à cette loi

$$C_1 = \mu_1,\quad C_2 = \mu_2 + \frac{1}{\mu_1},\dots,\quad C_3 = \mu_3 + \frac{1}{\mu_2},\dots,$$

$$C_i = \mu_i + \frac{1}{\mu_{i-1}},\dots,\quad C_r = \mu_r,$$

où les μ sont des quantités positives quelconques.

Si, dans la fraction continue

$$\frac{1}{q_1}\,+\,\frac{1}{q_2}\,+\,\frac{1}{q_3}\,+\cdots+\,\frac{1}{q_{r-1}}\,+\,\frac{1}{q_r}\quad (*)$$

(*) C'est ainsi que les Anglais écrivent la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \text{etc.}}}.$$

(les quantités q_1, q_2,... étant des quantités positives ou négatives), on a les inégalités

$$[q_1] > C_1, \quad [q_2] > C_2, \quad [q_3] > C_3, \ldots, \\ [q_{r-1}] > C_{r-1}, \quad [q_r] > C_r$$

(les crochets indiquent la racine carrée positive du carré de la quantité que ces crochets renferment); le dénominateur de la fraction continue aura même signe que le produit $q_1 q_2 q_3 \ldots q_{r-1} q_r$.

Démonstration. Posons

$$q_1 = m_1,$$

$$q_2 + \frac{1}{m_1} = m_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_t + \frac{1}{m_{t-1}} = m_t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_r + \frac{1}{m_{r-1}} = m_r;$$

il est aisé de vérifier que les dénominateurs successifs de la fraction continue sont

$$m_1;\ m_1 m_2;\ m_1 m_2 m_3; \ldots,\ m_1 m_2 m_3 \ldots m_{r-1} m_r;$$

m_1 a même signe que q_1 :

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{[q_1]} < \frac{1}{\mu_1}, \quad \frac{1}{m_1} < \frac{1}{\mu_1}, \quad [q_2] > \frac{1}{\mu_1}, \quad [q_2] > \frac{1}{m_1} \text{ etc.};$$

donc q_2 a même signe que m_2, et aussi $m_1 m_2$ est de même signe que $q_1 q_2$:

$$m_2 > \mu_2 + \frac{1}{\mu_1}, \quad m_2 > \mu_2, \quad \frac{1}{m_2} < \frac{1}{\mu_2}, \quad [q_3] > \frac{1}{\mu_2};$$

donc q_3 a même signe que m_3; ainsi $m_1 m_2 m_3$ est de même signe que $q_1 q_2 q_3$, et, en continuant, on parvient à démontrer que $m_1 m_2 m_3 \ldots m_{r-1} m_r$, c'est-à-dire le dénominateur de la fraction continue, est de même signe que le produit $q_1 q_2 q_3 \ldots q_{r-1} q_r$.

2. Théorème. *Si $f(x)$ est une fonction algébrique entière de degré n, et si l'on prend arbitrairement une autre $\varphi(x)$ algébrique et entière, et d'un degré moindre que n, et qu'on développe la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ en fraction continue*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{X_1 +} \frac{1}{X_2 +} \cdots \frac{1}{+ X_{r-1} +} \frac{1}{X_r},$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont des fonctions rationnelles de x, et si l'on forme l'équation

$$(\theta) \quad X = (X_1^2 - C_1^2)(X_2^2 - C_2^2) \ldots (X_{r-1}^2 - C_{r-1}^2)(X_r^2 - C_r^2) = 0,$$

la racine réelle supérieure de cette équation sera plus grande, et la racine réelle inférieure de cette équation sera moindre qu'aucune des racines réelles de l'équation

$$f(x) = 0;$$

et si toutes les racines de l'équation (θ) sont imaginaires, l'équation

$$f(x) = 0$$

aura aussi toutes ses racines imaginaires.

Démonstration. Tous les quotients de la fraction continue qui suivent le premier quotient, savoir : $X_2, X_3, \ldots, X_r$, sont *en général* des fonctions linéaires de x, et X_1 sera aussi linéaire, si $\varphi(x)$ est de degré $n - 1$; les cas particuliers ne changent pas la marche de la démonstration ; mais il faut remarquer que lorsque $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont des racines communes, le dernier quotient aura la forme $\frac{[\chi]}{0}$, $[\chi]$ étant l'avant-dernier terme, et alors, dans l'équation (θ), au lieu de $X_r^2 - C_r^2$, on écrit simplement X_r^2.

Soient L la plus grande racine et Λ la plus petite racine de l'équation (θ); alors aucun facteur de (θ) ne peut devenir nul pour des valeurs de x comprises entre $+\infty$ et L, et entre Λ et $-\infty$; donc on aura toujours

$$\begin{gathered}
[X_1] > C_1, \\
[X_2] > C_2, \\
\ldots\ldots\ldots \\
[X_{r-1}] > C_{r-1}, \\
[X_r] > C_r.
\end{gathered}$$

Or $f(x)$ est évidemment égal au dénominateur de la fraction continue multiplié par un facteur constant. Donc, en vertu du lemme, le dénominateur de la fraction continue est de même signe que le produit $X_1 X_2 X_3 \ldots X_{r-1} X_r$ pour les valeurs de x comprises entre $+\infty$ et L, et entre Λ et $-\infty$; mais dans ces intervalles la fonction générale X_i n'étant pas comprise entre $+C_i$ et $-C_i$ ne peut devenir nulle, et, par conséquent, ne peut changer de signe; donc le dénominateur de la fraction continue conserve le même signe pour toute valeur de x renfermée entre ces intervalles, et de même $f(x)$; L est donc une limite supérieure et Λ une limite inférieure des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Le nombre des racines réelles de l'équation (θ) est évidemment pair, zéro compris; dans ce dernier cas, c'est-à-dire (θ) n'ayant aucune racine réelle, $f(x)$ ne changera donc pas de signe pour des valeurs de x comprises entre $+\infty$ et $-\infty$; autrement toutes les racines de $f(x) = 0$ sont imaginaires. Le théorème est donc complétement démontré.

3. Si $\varphi(x)$ est de degré $n-1$, la fraction continue renferme *en général* (sauf les cas où quelques-uns des coefficients deviennent nuls), comme il a été dit plus haut,

n quotients linéaires de la forme

$$a_1 x - b_1, \quad a_2 x - b_2, \ldots, \quad a_{n-1} x - b_{n-1}, \quad a_n x - b_n;$$

donc, d'après le théorème, la plus grande et la plus petite des $2n$ quantités

$$\frac{b_1 \pm C_1}{a_1}, \quad \frac{b_2 \pm C_2}{a_2}, \ldots, \quad \frac{b_{n-1} \pm C_{n-1}}{a_{n-1}}, \quad \frac{b_n \pm C_n}{a_n},$$

sont respectivement une limite supérieure et une limite inférieure des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Si l'on prend

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r-1} = 1,$$

on vient au théorème énoncé (page 286).

4. Lors même que les quotients X_1, X_2, etc., ne sont pas linéaires, on n'aura pourtant jamais à résoudre que des équations du premier degré. En effet, soient les $2r$ équations de degré quelconque

$$X_1 - C_1 = 0, \quad X_2 - C_2 = 0, \ldots, \quad X_r - C_r = 0,$$
$$X_1 + C_1 = 0, \quad X_2 + C_2 = 0, \ldots, \quad X_r - C_r = 0.$$

Il suffit de trouver une quantité l supérieure aux racines de ces équations, et une quantité λ inférieure à ces mêmes racines, l et λ seront des limites pour l'équation

$$f(x) = 0.$$

Si donc une de ces équations est de degré $p > 1$, on applique à cette équation le procédé ci-dessus, en choisissant une fonction $\varphi(x)$ de degré $p - 1$, et, en agissant ainsi, on arrivera par une sorte de trituration à n'avoir à traiter que des équations du premier degré.

5. On a

$$C_t = \mu_t + \frac{1}{\mu_{t-1}};$$

plus la valeur de μ_t est petite, et plus on aura de chances à resserrer les limites dans les deux fractions $\frac{b_\iota \pm C_\iota}{a_\iota}$; par contre, on aura un désavantage sous ce rapport dans les deux fractions suivantes $\frac{b_{\iota+1} \pm C_{\iota+1}}{a_{\iota+1}}$; car $C_{\iota+1} = \mu_{\iota+1} + \frac{1}{\mu_\iota}$. Plus μ_ι diminue, et plus $C_{\iota+1}$ augmente. Cet inconvénient n'a pas lieu pour la dernière fraction; on peut donc prendre $\mu_n = 0$ et $C_n = \frac{1}{\mu_{n-1}}$.

6. Il est à remarquer que tous les raisonnements précédents subsistent en renversant la suite des μ et l'écrivant ainsi :

$$\frac{1}{\mu_{r-1}}, \quad \frac{1}{\mu_{r-2}} + \mu_{r-1}, \ldots, \quad \frac{1}{\mu_2} + \mu_1.$$

7. Il y a lieu à des recherches intéressantes sur la forme à donner à $\varphi(x)$, et sur les valeurs à donner aux quantités μ pour obtenir les limites les plus resserrées, et je crois être parvenu à démontrer que la forme la plus avantageuse est $f'(x)$, précisément la forme que M. Sturm a adoptée.

8. Dans la réduction en fraction continue de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, nous n'avons considéré que des quotients binômes; mais on peut pousser les divisions plus loin et obtenir des quantités de la forme

$$ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x_2} + \ldots + \frac{l}{x^r};$$

le reste correspondant sera de la forme

$$a' x^{r+1} + b' x^r + c' x^{r-1} + \ldots + \frac{l}{x^r}.$$

En opérant ainsi, le nombre de termes dans chaque reste ira en diminuant, comme dans le procédé ordinaire, et le dernier reste sera de la forme Cx^μ, μ étant un entier positif ou négatif, et le dernier quotient de la forme

$Px^p + Qx^{p-1}$, p étant un entier positif ou négatif; nommant les quotients ainsi obtenus $q_1, q_2, \ldots, q_r$, on voit aisément qu'on aura

$$f(x) = \mathrm{M}\,x^{\pm i}\,\mathrm{D},$$

où M est une constante, i un nombre entier positif ou négatif dont la valeur dépend de la manière dont on a opéré dans les divisions successives, et D est le dénominateur de la fraction continue

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots + \frac{1}{q_{r-1}} + \frac{1}{q_r}.$$

Donc, si l'on écrit, comme ci-dessus,

$$\mathrm{X} = (q_1^2 - \mathrm{C}_1^2)(q_2^2 - \mathrm{C}_2^2)\ldots(q_r^2 - \mathrm{C}_r^2) = 0,$$

nommant L et Λ les racines extrêmes de cette équation, si zéro n'est pas compris entre $+\infty$ et L, ni entre Λ et $-\infty$, la démonstration donnée ci-dessus subsiste encore pour le cas général. Et lors même que zéro est compris entre ces limites, L et Λ restent tout de même les limites pour les racines, abstraction faite de la racine zéro.

Observation. L'illustre analyste est parvenu à donner encore une plus grande extension à son théorème, et même à substituer les quotients $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$, etc., aux résidus de M. Sturm pour découvrir le nombre de racines positives et négatives. (*Philosophical Magazine*. Juin 1853.)

L'auteur donne cette forme à la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \text{etc.}}}}$$

rendant négatifs tous les quotients, alors $\mathrm{N}_i\mathrm{D}_{i-1} - \mathrm{N}_{i-1}\mathrm{D}_i$ est toujours égal à $+1$; tandis que dans les fractions continues ordinaires cette différence est alternativement $+1$ et -1. Nous reviendrons sur ce travail, qui contient des propriétés nouvelles et curieuses relatives aux quotients $a_1 x + b_1$; $a_2 x + b_2$; etc.