

T. JOACHIMSTHAL

Sur une formule relative aux tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 323-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__323_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX TANGENTES;

PAR M. T. JOACHIMSTHAL (*).

La formule dont je vais donner la démonstration est la suivante :

$$1 - \frac{\operatorname{tang} mx}{\operatorname{tang} x} + \frac{\operatorname{tang} mx \cdot \operatorname{tang} (m-1)x}{\operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} 2x} - \dots$$
$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tang} mx \cdot \operatorname{tang} (m-1)x \dots \operatorname{tang} x, \quad \text{pour } m \text{ pair;}$$
$$= 0, \quad \text{pour } m \text{ impair.}$$

(*) Maintenant professeur à l'Université de Halle.

On la démontre par une méthode dont M. Gauss s'est servi pour deux séries bien connues, d'une forme semblable.

En désignant

$$\frac{\text{tang } mx \cdot \text{tang } (m-1)x \dots \text{tang } (m-\mu+1)x}{\text{tang } x \cdot \text{tang } 2x \dots \text{tang } \mu x} = (m, \mu),$$

on aura

$$(1) \quad (m, \mu) \text{ tang } (m-\mu)x = (m-1, \mu) \text{ tang } mx,$$

$$(2) \quad \begin{cases} (m, \mu+1) = (m, \mu) \frac{\text{tang } (m-\mu)x}{\text{tang } (\mu+1)x}, \\ (m-1, \mu+1) = (m-1, \mu) \frac{\text{tang } (m-\mu-1)x}{\text{tang } (\mu+1)x}. \end{cases}$$

Il suit de là

$$\begin{aligned} & (m, \mu+1) - (m-1, \mu+1) \\ = & \frac{(m, \mu) \text{ tang } (m-\mu)x - (m-1, \mu) \text{ tang } (m-\mu-1)x}{\text{tang } (\mu+1)x} \\ = & (m-1, \mu) \frac{\text{tang } mx - \text{tang } (m-\mu-1)x}{\text{tang } (\mu+1)x} \\ = & (m-1, \mu) [1 + \text{tang } mx \text{ tang } (m-\mu-1)x], \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (m-1, \mu) &= (m-1, \mu+1) + (m-1, \mu) \\ &+ (m-1, \mu) \text{ tang } mx \text{ tang } (m-\mu-1)x. \end{aligned}$$

A l'aide de cette formule on peut décomposer les termes de la série

$$1 - (m, 1) + (m, 2) - \dots = f(m),$$

comme il suit :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ - (m, 1) &= - (m-1, 1) - 1 - \text{tang } mx \text{ tang } (m-1)x, \\ (m, 2) &= (m-1, 2) + (m-1, 1) \\ &+ \text{tang } mx \text{ tang } (m-2)x \cdot (m-1, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(m, 3) &= -(m-1, 3) - (m-1, 2) \\
&\quad - \text{tang } mx \cdot \text{tang } (m-3)x \cdot (m-1, 2), \\
&\dots\dots\dots \\
\varepsilon(m, m-1) &= \varepsilon(m-1, m-1) + \varepsilon(m-1, m-2) \\
+ \varepsilon \text{ tang } mx \text{ tang } x \cdot (m-1, m-2), \\
-\varepsilon(m, m) &= -\varepsilon(m-1, m-1), \\
\varepsilon &= (-1)^{m-1}.
\end{aligned}$$

En additionnant ces équations, on trouve

$$f(m) = - \text{tang } mx \left[\begin{array}{l} \text{tang } (m-1)x \\ -(m-1, 1) \text{ tang } (m-2)x \\ + (m-1, 2) \text{ tang } (m-3)x \\ \dots + \varepsilon(m-1, m-2) \text{ tang } x \end{array} \right];$$

mais, en vertu de la relation (1), on a

$$\begin{aligned}
(m-1, 1) \text{ tang } (m-2)x &= (m-2, 1) \text{ tang } (m-1)x, \\
(m-1, 2) \text{ tang } (m-3)x &= (m-2, 2) \text{ tang } (m-1)x, \\
\text{etc.},
\end{aligned}$$

donc

$$f(m) = - \text{tang } mx \text{ tang } (m-1)x [1 - (m-2, 1) + (m-2, 2) - \dots],$$

et, par suite,

$$(3) \quad f(m) = - \text{tang } mx \text{ tang } (m-1)x f(m-2),$$

ou bien, par un calcul bien simple,

$$(4) \quad \begin{cases} f(m) = (-1)^n \text{ tang } mx \text{ tang } (m-1)x \dots \\ \text{tang } (m-2n+1)x f(m-2n); \quad m > 2n. \end{cases}$$

En remarquant qu'on a

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0,$$

on parvient à l'équation

$$(5) \quad \begin{cases} f(m) = (-1)^{\frac{m}{2}} \text{ tang } mx \text{ tang } (m-1)x \dots \text{ tang } x, \\ \text{pour } m \text{ pair,} \\ = 0, \text{ pour } m \text{ impair;} \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

M. Heine (*), auquel j'avais communiqué ces résultats, m'en a donné une démonstration analogue à celle qu'il a publiée pour les deux séries de M. Gauss. (CRELLE, *Journal de Mathématiques*, tome XXXIX, p. 288; 1850.)

Il prend pour point de départ les équations

$$\begin{aligned} \frac{(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots} &= 1 + \frac{1+q}{1-q} x \\ &\quad + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)} x^2 + \dots, \\ \frac{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\dots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots} &= 1 - \frac{1+q}{1-q} x \\ &\quad + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)} x^2 - \dots \end{aligned}$$

En les multipliant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \frac{(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^m)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)} \\ &\times \left(1 - \frac{1+q}{1-q} \frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q} \frac{1+q^2}{1-q^2} \frac{1-q^m}{1+q^m} \frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}} \dots \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1+q}{1-q} \frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q} \frac{1+q^2}{1-q^2} \frac{1-q^m}{1+q^m} \frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}} \\ &\dots = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}{(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^m)}, \text{ pour } m \text{ pair,} \\ &= 0, \text{ pour } m \text{ impair;} \end{aligned}$$

ce qui coïncide avec l'équation (5).

