Nouvelles annales de mathématiques

Philippe Koralek

Résolution de la question 263

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 319-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__319_0>

RÉSOLUTION DE LA QUESTION 263

(voir t. XI, p. 401);

Par M. Philippe KORALEK,
Employé au Ministère de l'Intérieur (Statistique).

L'équation

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0$$

étant donnée, trouver les racines avec 7 décimales exactes.

(Gauss.)

Solution. On a

$$\begin{array}{ll}
f(0) = -1, & f(0,1) = +0,2396512, \\
f(0,2) = -0,3225984, & f(0,3) = +0,0145904, \\
f(0,4) = +0,2935168, & f(0,5) = 0, \\
f(0,6) = -0,2935168, & f(0,7) = -0,0145904, \\
f(0,8) = +0,3225984, & f(0,9) = -0,2396512, \\
f(1) = +1.
\end{array}$$

En désignant les sept racines de l'équation par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7,$$

on voit que la racine

x_1	est comprise	entre	0 et 0,1,
x_2	»	»	0,1 et 0,2,
x_3	»	»	0,2 et 0,3,
x_4	»	»	0,5,
x_5	»	»	0,7 et 0,8,
x_6	»	»	0,8 et 0,9,
x_7	»	»	0,9 et 1.

Recherche de la première racine, comprise entre 0 et 0,1.

On trouve

$$f(0,08) = +0,3703352,\quad f(0,06) = +0,408296,$$
$$f(0,04) = +0,2712864,\quad f(0,03) = +0,10404,$$
$$f(0,025) = -0,0112272.$$

Ces substitutions prouvent que la racine est plus grande que 0,025 et plus petite que 0,03.

En appliquant la règle de la fausse position (la méthode la plus précieuse dans la pratique), on a la formule

$$w_1 = s_2 - \frac{f_2(s_1 - s_2)}{f_1 - f_2},$$

où f_1 et f_2 sont les résultats des substitutions s_1 et s_2, et w_1 la première valeur approximative de la racine.

Donc, en mettant

$$s_1 = 0,025,\quad s_2 = 0,03,$$

il vient

$$f_1 = -0,0112272,\quad f_2 = +0,10404,$$

et

$$w_1 = 0,02547\ ;$$

par les substitutions de w_1 et s_1, il vient

$$f(w_1) = +0,0005976,\quad f_1 = -0,0112272,$$

et

$$w_2 = 0,0254462.$$

Par les substitutions de w_1 et w_2, il vient

$$f(w_1) = +0,0005976,\quad f(w_2) = 0,00000507,$$

et

$$w_3 \quad \text{ou} \quad x_1 = 0,0254462.$$

Deuxième racine.

En opérant de même pour la seconde racine, il vient

$$w_1 = 0,14; \quad f(0,14) = -0,0821661,$$

$$f(0,13) = -0,0060871, \quad f(0,1292) = +0,0002743,$$

et

$$x_2 = 0,1292345;$$

le 5 est trop fort.

Troisième racine.

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,295, & f(w_1) &= -0,0104236, \\ w_2 &= 0,29708, & f(w_2) &= +0,0000129, \\ w_3 &= 0,29707743, \end{aligned}$$

et

$$x_3 = 0,2970774.$$

Quatrième racine.

$$x_4 = 0,5.$$

Cinquième racine.

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,7043, & f(w_1) &= +0,0069088, \\ w_2 &= 0,70292, & f(w_2) &= -0,0000128, \\ w_3 &= 0,702922552, \end{aligned}$$

et

$$x_5 = 0,7029226;$$

le chiffre 6 est trop fort.

Sixième racine.

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,8574, & f(w_1) &= +0,1007147, \\ w_2 &= 0,87000, & f(w_2) &= +0,0060946, \\ w_3 &= 0,87074, & f(w_3) &= +0,0002041, \\ w_4 &= 0,8707656, \end{aligned}$$

et

$$x_6 = 0,8707656;$$

le chiffre 6 est trop faible.

Septième racine.

Le calcul offre quelques difficultés, puisque $f(x)$ varie moins sensiblement entre 0,9 et 0,1 qu'entre 0,1 et 0,2, etc., circonstance qui nous obligeait de calculer d'abord $f(0,92)$, $f(0,94)$, $f(0,96)$, $f(0,98)$. La connaissance de toutes ces valeurs n'est pas nécessaire; mais comme l'application du principe de la règle de fausse position nous prescrit de les calculer, nous indiquons leurs valeurs. On a

$$f(0,92) = -0,3703349, \quad f(0,94) = -0,40929369,$$
$$f(0,96) = -0,2712865, \quad f(0,98) = 0,150555.$$

Ces deux dernières valeurs donnent :

$$w_1 = 0,973, \qquad f(0,973) = -0,0318033,$$
$$w_2 = 0,9743, \qquad f(0,9743) = -0,0063073,$$
$$w_3 = 0,97463, \qquad f(w_3) = +0,0019014,$$
$$w_4 = 0,9745536,$$

et

$$x_7 = 0,9745536.$$

Récapitulation.

$$x_1 = 0,0254462,$$
$$x_2 = 0,1292345,$$
$$x_3 = 0,2970774,$$
$$x_4 = 0,5,$$
$$x_5 = 0,7029226,$$
$$x_6 = 0,8707656,$$
$$x_7 = 0,9745536.$$

Vérification.

1°. La somme des 7 racines est $= 3,4999999$.

En divisant le coefficient du second terme par celui du premier, il vient

$$-12012 : 3432 = -3,5 \quad \text{(quotient exact).}$$

Ainsi la somme de 7 racines est exacte à une unité décimale du huitième ordre près.

2°. Le produit des racines est

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7.$$

On a

$$x_1 x_2 = 0,00328854, \quad x_1 x_2 x_3 = 0,000976912,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_5 = 0,00068867146, \quad x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 = 0,00059796744,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 = 0,00058275131\ ;$$

enfin

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 = 0,000291375.$$

En divisant le dernier terme par le coefficient du premier, on obtient la fraction périodique mixte

$$-1 : 3432 = -0,000291375,$$

exactitude surprenante.