T.-B. KHORASSANDJI

Solution de la question 271 (Steiner)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 289-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__289_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 271 (STEINER)

(voir p. 99);

PAR M. T.-B. KHORASSANDJI, Arménien.

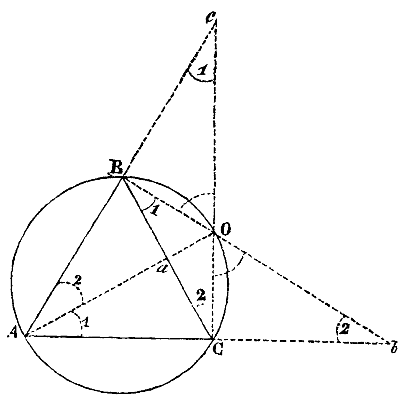
THÉORÈME. *Par le point p et les sommets* A, B, C, *on mène trois droites rencontrant respectivement les côtés a, b, c en a_1, b_1, c_1; si l'on a*

$$Ap.Bp.Cp = a_1p\ b_1p.c_1p,$$

le lieu des points p est une ellipse circonscrite au triangle, et ayant pour centre, le centre de gravité du triangle.

Lemme. Soit O un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle équilatéral ABC; prolongeons OA, OB, OC jusqu'en a, b, c, où ces droites coupent les côtés opposés aux sommets A, B, C; nous aurons l'égalité

(A) $$OA \times OB \times OC = Oa \times Ob \times Oc.$$



Démonstration. A cause de l'égalité des trois arcs AB, BC, CA, et par suite de la théorie de la mesure des angles, il est facile de voir que les angles en c, b, marqués (1) et (2), sont égaux respectivement aux angles en A, marqués (1) et (2). D'ailleurs, chacun des angles BOc, BOa, COa et COb est égal à l'angle du triangle équilatéral. Cela posé,

1°. Les triangles semblables AOb, AOc donnent

$$\frac{OA}{Oc} = \frac{Ob}{OA},$$

d'où

(1) $$\overline{OA}^2 = Ob.Oc;$$

2°. Les triangles semblables BOc, BOa donnent

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{O}a} = \frac{\mathrm{O}c}{\mathrm{OB}},$$

d'où

(2) $$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \mathrm{O}c.\mathrm{O}a;$$

3°. Les triangles semblables COa, COb donnent

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{O}b} = \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{OC}},$$

d'où

(3) $$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \mathrm{O}a.\mathrm{O}b.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1), (2) et (3), on trouve

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 \times \overline{\mathrm{OB}}^2 \times \overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{O}a}^2 \times \overline{\mathrm{O}b}^2 \times \overline{\mathrm{O}c}^2,$$

ou, enfin,

(A) $$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \mathrm{OC} = \mathrm{O}a \times \mathrm{O}b \times \mathrm{O}c.$$

C. Q. F. D.

Remarque I. On sait que l'on a

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} + \mathrm{OC}.$$

Donc, en remplaçant ces lignes par leurs valeurs, tirées des équations (1), (2) et (3), on a

$$\sqrt{\mathrm{O}b.\mathrm{O}c} = \sqrt{\mathrm{O}c.\mathrm{O}a} + \sqrt{\mathrm{O}a.\mathrm{O}b}.$$

Remarque II. On peut écrire l'équation (A) ainsi qu'il suit :

(A′) $$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O}a} \times \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{O}b} \times \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{O}c} = 1.$$

Sous cette forme, on voit que la relation est projective cylindriquement; mais si l'on fait une projection cylindrique de la figure précédente, le cercle devient une ellipse, le triangle équilatéral inscrit au cercle devient un triangle d'aire maximum inscrit dans l'ellipse, et ayant par suite son centre de gravité au centre même de l'ellipse. On retrouve ainsi le théorème de M. Steiner, qui fait l'objet de la question 271.