Exposition analytique des points en involution et des rapports composés segmentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 24-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__24_1>

EXPOSITION ANALYTIQUE DES POINTS EN INVOLUTION ET DES RAPPORTS COMPOSÉS SEGMENTAIRES.

I. *Involution.*

1. *Définition.* Si l'on porte sur une droite, à partir d'un point fixe pris pour origine, des longueurs proportionnelles aux racines d'une équation algébrique de degré m, ayant égard à leurs signes, les points ainsi déterminés sont dits *points-racines.*

Observation. Aux racines égales correspondent des points conjugués multiples; aux racines imaginaires, des points imaginaires qui donnent des résultats réels, lorsque les racines sont combinées symétriquement; résultats dont il faut tenir compte quand il s'agit de ce genre de combinaisons.

2. *Définition.* Soit

$$a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots + a_{m+1} = 0$$

une équation algébrique donnant lieu à un système de n points-racines; prenons une distance quelconque l, qui détermine un point que nous désignons par C; le produit des distances du point C aux m points-racines est évidemment égal à

$$l^m + \frac{a_2}{a_1} l^{m-1} + \ldots + \frac{a_{m+1}}{a_1};$$

ce produit est la *puissance* du point C relativement au système des m points-racines. Le point C peut se nommer *point-potentiel*.

Observation. La puissance de l'origine est $(-1)^m \frac{a_{m+1}}{a_1}$.

3. *Définition.* Si plusieurs systèmes de points-racines, placés sur la même droite, ont la même *puissance* par rapport au même point-potentiel C, ces systèmes équivalents sont dits *en involution*, et le point-potentiel porte le nom de *centre d'involution*, ou simplement de *point central*.

4. Théorème. *Étant donné un système de n équations algébriques*

$$(1) \quad P + Q_1 = 0, \quad P + Q_2 = 0, \ldots, \quad P + Q_n = 0,$$

P, Q, $Q_2, \ldots, Q_n$ *sont des fonctions algébriques entières de* x. *Si les* $n - 1$ *équations*

$$(2) \quad Q_1 - Q_2 = 0, \quad Q_1 - Q_3 = 0, \ldots, \quad Q_1 - Q_n = 0,$$

ont des racines communes, les n systèmes de points-racines donnés par les équations (1) *sont en involution, par rapport à chaque point déterminé par une des racines communes au système* (2).

Démonstration. Soit r une des racines communes au système (2); cette valeur étant mise à la place de x dans chacune des équations du système (1) donne des résultats égaux, car la différence entre deux quelconques de ces résultats est nulle; mais chacun de ces résultats est la puissance du point déterminé par r, par rapport à un système de points-racines, § 2, donc C est un point central, et tous les n systèmes de points-racines sont en involution.

Corollaire. Si l'on veut ajouter un nouveau système de p points en involution avec les n systèmes, il est évident qu'on peut prendre $p-1$ de ces points à volonté. Si le point C fait partie des $p-1$ points, le $p^{ième}$ point est situé à l'infini; car zéro entre alors comme facteur dans le dénominateur de la fraction qui détermine le $p^{ième}$ point.

5. Les trois systèmes des points-racines donnés par les équations

$$P + Q_1 = 0, \quad P + Q_2 = 0, \quad P + Q_1(1 - m) + mQ_2 = 0,$$

sont en involution; car les deux différences $Q_1 - Q_2$, $m(Q_1 - Q_2)$ étant égalées à zéro, ont les mêmes racines (4).

Si P, Q_1, Q_2 sont des fonctions entières à deux variables x, y; alors les trois équations représentent trois courbes algébriques passant par les mêmes points; car la troisième équation s'obtient en ajoutant la première, multipliée par $1 - m$, à la seconde, multipliée par m. Faisant

$$y = 0$$

dans les trois équations, on a trois équations dont les points-racines sont les intersections des trois courbes avec l'axe des x; et, d'après ce qui vient d'être dit, les systèmes sont en involution. On a donc le théorème suivant.

6. Théorème.

$$R = 0, \quad S = 0, \quad (1 - m)R + mS = 0$$

étant les équations de trois courbes algébriques, une sécante quelconque les coupe en trois systèmes de points qui sont en involution; et il y a autant de centres d'involution que l'équation $R - S = 0$ *a de racines.*

Le théorème de Desargues est compris dans ce théorème général.

Observation. On a un théorème analogue, si R, S étant des fonctions à trois variables, les équations représentent des surfaces.

7. Les coniques étant toujours le principal sujet d'investigations géométriques, et ces courbes n'étant rencontrées par une droite qu'en deux points, on n'a guère étudié que l'involution d'un système de deux points-racines chacun.

8. Une équation *réciproque* de degré $2n$ donne un système n de deux points-racines en involution relativement à l'origine, la puissance étant 1.

9. Soient les trois équations

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$
$$b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0,$$
$$c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0;$$

pour que les trois systèmes de deux points-racines soient en involution, il faut et il suffit que les deux équations

$$x\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \frac{a_3}{b_1} - \frac{b_3}{b_1} = 0,$$
$$x\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{c_2}{c_1}\right) + \frac{a_3}{a_1} - \frac{c_3}{c_1} = 0$$

aient une racine commune; ce qui donne la relation

$$\text{(1)} \qquad \text{déterminant } (a_1 b_2 c_3) = 0;$$

et, lorsque cette relation subsiste, les trois systèmes sont en involution. Le centre d'involution est déterminé par l'équation

$$x = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_1 - a_1 c_2};$$

en réduisant au même dénominateur les deux valeurs égales de x, on retrouve l'équation (1).

En éliminant x^2 et x entre les trois équations, on a encore l'équation (1); donc une de ces équations est une conséquence des deux autres; de sorte qu'on a la relation

$$c_1 = a_1 + nb_1, \quad c_2 = a_2 + nb_2, \quad c_3 = a_3 + nb_3.$$

Donnant à n une valeur quelconque, même imaginaire, on trouve tous les couples de points en involution avec les deux premiers couples.

Observation. L'équation (1) n'est autre que l'équation (1) de M. Chasles (*Géométrie supérieure,* page 155).

10. Reprenons l'équation

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines; $l-\alpha_1$, $l-\alpha_2, \ldots$, $l-\alpha_n$ sont les n distances du point C aux n points-racines, § 2. Une fonction symétrique de ces distances s'exprime en fonction de l, et des coefficients de l'équation. Les systèmes de points-racines pour lesquels cette fonction est constante, relativement au même point C, sont dans une relation involutive. On n'a étudié jusqu'ici que les *produits* qui donnent des propriétés géométriques d'un énoncé simple, et aussi les *sommes* qui se rattachent aux points de moyenne distance; mais toute fonction symétrique renferme quelque théorème de géométrie. On peut même dire que les principales propriétés des lignes et des surfaces ne sont que l'expression *graphique* de quelque fonction symétrique. La théorie de ces fonctions est le fondement de toute la géométrie supérieure. Aussi n'a-t-on pas manqué de retrancher cette théorie du nouvel enseignement; car nous ne devons connaître d'autre supériorité que celle de nos *faiseurs*. Soit.

II. *Rapports composés segmentaires.*

11. Le produit de plusieurs rapports géométriques est un *rapport composé*. Soit une équation de degré $2n$ donnant autant de points-racines. Décomposons ces $2n$ racines en n groupes de deux racines chacun ; prenant la différence de deux racines dans chaque groupe, on aura n segments. Désignons le produit de ces n segments par P ; faisant une seconde décomposition semblable, on parvient à un autre produit R. Le rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$ ou $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}}$ est un *rapport composé segmentaire*.

12. *Lemme.*

$$a - b = c,$$

$$\frac{p}{a} - \frac{p}{b} = -\frac{pc}{ab}.$$

13. Théorème. *Si, dans un rapport composé segmentaire, on remplace chaque racine α par $\frac{p}{\alpha}$, p étant un nombre donné, le rapport reste le même.*

Démonstration. Si en remplaçant chaque racine α par $\frac{p}{\alpha}$, le produit que nous désignons par P devient $(-p)^n \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}$, le produit R devient $(-p)^n \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}$, S étant le produit des $2n$ racines (*lemme* 12). Donc le rapport ne change pas.

14. *Lemme.* Soit l'équation

$$a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots + a_m x + a_{m+1} = 0;$$

si l'on a la relation

$$\frac{a_{r+1} \cdot a_{m+2-r}}{a_r \cdot a_{m+1-r}} = p,$$

p étant un nombre donné; pour n impair, l'équation a une racine égale à $-p$, et les $n-1$ autres racines se partagent en $\frac{n-1}{2}$ groupes de deux racines, dont le produit est p; pour n pair, les racines se partagent en $\frac{n}{2}$ groupes de deux racines, dont le produit est p.

Observation. Cette équation est dite *réciproque,* dans le sens général. On applique ordinairement cette dénomination à une équation lorsque $p=1$. Nous conservons le sens général.

15. *Corollaire.* Une équation réciproque de degré $2n$ est une involution de n groupes de deux points-racines, l'origine étant le centre d'involution. Formons un rapport composé segmentaire avec un nombre p de ces racines. Remplaçons, dans ce rapport, chaque racine par son inverse, on aura un rapport composé, qui sera encore segmentaire, car les *inverses* sont aussi *racines de l'équation;* et ce second rapport segmentaire sera égal au premier (13).

Rapport segmentaire binaire.

16. Un rapport *binaire* est le produit de deux rapports. Considérons quatre points-racines donnés par les racines α, β, α_1, β_1, que ces points suivent l'ordre croissant de grandeur de gauche à droite; on peut former trois rapports binaires,

$$\frac{(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\beta)}{(\beta_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)},\quad \frac{(\beta_1-\alpha)(\beta-\alpha_1)}{(\beta-\alpha)(\beta_1-\alpha_1)},\quad \frac{(\beta-\alpha)(\alpha_1-\beta_1)}{(\alpha_1-\alpha)(\beta-\beta_1)}.$$

Dans chaque rapport, chacune des racines paraît deux fois. Le premier et le troisième rapport sont positifs, et le deuxième est négatif. Ces trois rapports sont maintenant connus sous le nom de rapports *anharmoniques;*

lorsque le rapport est égal à -1, on le nomme *rapport harmonique*.

Observation. Chez les anciens, le second rapport s'écrivait aussi

$$\frac{(\beta_1 - \alpha)(\alpha_1 - \beta)}{(\beta - \alpha)(\beta_1 - \alpha_1)}.$$

Il était positif, et devenait *harmonique*, lorsqu'il était égal à $+1$; mais alors il n'y a plus de symétrie dans l'expression. C'est ce qui a engagé M. Chasles à changer le signe et à écrire $\beta - \alpha_1$, au lieu de $\alpha_1 - \beta$. D'ailleurs le célèbre géomètre ne fait point usage de la notation des points-racines. Cette notation rendrait peut-être plus mnémoniques les précieuses et nombreuses équations qui se rattachent aux rapports harmoniques, et qui sont consignées dans la *Géométrie supérieure*. L'idée des points-racines appartient à M. Gauss (*voir* t. I, p. 444).