NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Note sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 243-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__243_1>

NOTE

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante;

Par M. Ossian BONNET.

J'ai publié dans ce Recueil (tome IV, 1845) un essai sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante; ce travail, dont la fin n'a pas paru, contenait une solution complète du problème que je m'étais posé, mais je dois avouer que cette solution était très-compliquée. J'ai reconnu depuis, en revenant sur le même sujet, pour simplifier, d'après les conseils de M. Terquem, mes anciens résultats, qu'il était possible de traiter la question d'une manière bien plus simple. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Soit

$$(1) \qquad f(t)=0$$

l'équation proposée où $f(t)$ est une fonction continue quelconque, réelle ou imaginaire. Posons

$$t=x+y\sqrt{-1},$$

$$f(x+y\sqrt{-1})=f_1(x,y)+f_2(x,y)\sqrt{-1}=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

$f_1=\mathrm{P}$ et $f_2=\mathrm{Q}$ étant des fonctions réelles de x et de y; et, regardant x, y, z comme des coordonnées rectangulaires, considérons la surface représentée par l'équation

$$(2) \qquad z=\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2.$$

Il est clair que les points où cette surface rencontrera le plan des (x, y) seront les points-racines de l'équation (1), c'est-à-dire les points ayant pour coordonnées x et y, les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ des racines de l'équation (1). On voit en même temps qu'en ces points, la surface représentée par l'équation (2) touchera le plan des (x,y), et, par conséquent, comme la surface est tout entière au-dessus du plan des (x, y), que, dans le voisinage de ces points, elle tournera sa convexité vers le plan des (x, y).

Cela posé, supposons que, par le théorème de M. Cauchy ou par tout autre moyen, on soit parvenu à tracer dans le plan des (x, y) un contour rectangulaire ABCDA ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées et comprenant un et un seul point-racine m de l'équation (1); supposons, en outre, que, pour tous les points compris dans ce contour, la surface tourne sa convexité du côté du plan des (x, y). Si l'on prend sur la surface représentée par l'équation (2) un point M_0 projeté en m_0 sur le contour ABCDA ou dans son intérieur, et que, par ce point, on mène un plan tangent, la trace RT de ce plan sur le plan des (x, y) laissera de côtés différents les points m_0 et m; par conséquent, en abaissant du point m_0 une perpendiculaire sur TR, et prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité m_1 ainsi obtenue sera plus voisine de m que m_0. Or il est facile de voir que le point m_1 correspond au nombre imaginaire que l'on obtient pour seconde valeur approchée de la racine dont le point m est la représentation géométrique, lorsqu'on applique la méthode de Newton à la valeur approchée qui répond au point m_0. En effet, soient α et β les coordonnées x et y du point m, et a et b celles du point m_0, de telle sorte que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ soit la racine cherchée, et $a + b\sqrt{-1}$ sa première valeur approchée; si nous posons

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1} + h + k\sqrt{-1},$$

nous aurons, pour déterminer h et k d'après la méthode de Newton,

$$f_1(a, b) + h\varphi(a, b) - k\psi(a, b) = 0,$$
$$f_2(a, b) + h\psi(a, b) + k\varphi(a, b) = 0.$$

En posant, pour simplifier,

$$\frac{df_1(x, y)}{dx} = \varphi(x, y), \qquad \frac{df_2(x, y)}{dx} = \psi(x, y),$$

de ces deux équations on tire

$$\sqrt{h^2 + k^2} = \frac{\sqrt{[f_1(a, b)]^2 + [f_2(a, b)]^2}}{\sqrt{[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2}},$$

$$\frac{k}{h} = -\frac{\psi(a, b)f_1(a, b) - \varphi(a, b)f_2(a, b)}{\varphi(a, b)f_1(a, b) + \psi(a, b)f_2(a, b)}.$$

Cela nous montre que la droite qui joint le point m_0 au point correspondant à la seconde valeur approchée, a

$$\frac{\sqrt{[f_1(a,b)]^2+[f_2(a,b)]^2}}{\sqrt{[\varphi(a,b)]^2+[\psi(a,b)]^2}}$$

pour longueur, et

$$-\frac{\psi(a,b)f_1(a,b)-\varphi(a,b)f_2(a,b)}{\varphi(a,b)f_1(a,b)+\psi(a,b)f_2(a,b)}$$

pour coefficient angulaire.

Considérons maintenant le plan tangent à la surface représentée par l'équation (2), au point M_0 projeté en m_0, l'équation de ce plan est

$$\begin{aligned} z-[f_1(a,b)]^2-[f_2(a,b)]^2 \\ =2[f_1(a,b)\varphi(a,b)+f_2(a,b)\psi(a,b)](x-a) \\ -2[f_1(a,b)\psi(a,b)-f_2(a,b)\varphi(a,b)](y-b), \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\frac{df_1(x,y)}{dy}=-\frac{df_2(x,y)}{dx}=-\psi(x,y),$$

$$\frac{df_2(x,y)}{dy}=\frac{df_1(x,y)}{dx}=\varphi(x,y);$$

par conséquent, l'équation de sa trace RT sur le plan des (x, y) est

$$\begin{aligned} -[f_1(a,b)]^2-[f_2(a,b)]^2 \\ =2[f_1(a,b)\varphi(a,b)+f_2(a,b)\psi(a,b)](x-a) \\ -2[f_1(a,b)\psi(a,b)-f_2(a,b)\varphi(a,b)](y-b). \end{aligned}$$

Au moyen du coefficient angulaire de cette droite, on reconnaît déjà qu'elle est perpendiculaire à la droite qui joint le point m_0 au point correspondant à la seconde valeur approchée de la racine $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. En second lieu, la distance du point m_0 à la ligne RT est

$$\frac{\sqrt{[f_1(a,b)]^2+[f_2(a,b)]^2}}{2\sqrt{[\varphi(a,b)]^2+[\psi(a,b)]^2}},$$

c'est-à-dire la moitié de la distance du point m_0 au point qui représente la seconde valeur approchée de la racine $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; donc, comme nous l'avons énoncé, ce dernier point s'obtient en abaissant du point m_0 une perpendiculaire sur la ligne RT, et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même. Il suit de là et de ce que nous avons dit plus haut, que toutes les fois qu'on partira d'une valeur approchée répondant à un point m_0 situé dans un contour ABCDA qui ne contiendra qu'un point-racine de l'équation (1) et qui sera tel, que dans toute l'étendue projetée dans ce contour, la surface représentée par l'équation (2) tournera sa convexité du côté du plan des (x, y), la méthode conduira à une valeur plus approchée que celle dont on sera parti.

Reste à indiquer le moyen de reconnaître si le contour ABCDA remplit les conditions que l'on vient d'énoncer, non-seulement pour le point de départ m_0, mais encore pour les points m_1, m_2, etc., de plus en plus rapprochés de m, que la méthode de Newton fait successivement connaître.

Remarquons d'abord que puisque, dans le voisinage du point m, la surface représentée par l'équation (2) tourne sa convexité du côté du plan des (x, y), cette propriété subsistera pour tous les points projetés dans l'intérieur du contour ABCDA, à moins que ce contour ne contienne des points vérifiant la condition

$$rt - s^2 = 0,$$

où r, s, t représentent, selon l'usage, les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ déduits de l'équation (2). Évaluant r, s, t, et simplifiant au moyen des relations

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx},$$

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dx\,dy} = -\frac{d^2P}{dx^2}, \qquad \frac{d^2Q}{dy^2} = \frac{d^2P}{dx\,dy} = -\frac{d^2Q}{dx^2},$$

on voit que l'équation précédente revient à

$$\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right]^2 - [P^2 + Q^2]\left[\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)^2\right] = 0.$$

On sera sûr qu'il n'existe aucun point dans le contour ABCDE, dont les coordonnées x et y vérifient cette équation; si, en appelant A′ un nombre plus petit que la plus petite valeur que prend l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui se rapportent à l'intérieur du contour ABCDA, et B′ et B″ des nombres respectivement plus grands que les plus grandes valeurs que prennent les deux expressions

$$P^2 + Q^2, \qquad \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2$$

pour les mêmes valeurs de x et de y, on a

$$A'^2 > BB''.$$

Or, supposons que le contour ABCDA qui, par hypothèse, ne contient qu'un point-racine de l'équation (1), ne renferme aucun point-racine de l'équation

$$f'(t) = 0,$$

par conséquent, que l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2$$

ne devienne jamais nulle dans le contour : cette expression étant le carré d'un module, et, comme telle, ne pouvant avoir d'autre minimum que zéro, n'aura aucun minimum dans l'intérieur du contour ABCDA; donc la plus petite valeur qu'elle prendra, quand x et y varieront de manière à correspondre toujours à des points situés dans le contour, aura lieu pour un point du contour même. Cela posé, soient

$$x = x_0,\quad x = \mathrm{X},\quad y = y_0,\quad y = \mathrm{Y}$$

les équations respectives des quatre droites qui forment le contour ABCDA. Faisons successivement

$$x = x_0,\quad x = \mathrm{X},\quad y = y_0,\quad y = \mathrm{Y},$$

dans l'expression

$$\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)^2,$$

et cherchons une quantité δ plus petite que la plus petite des valeurs que prennent les résultats obtenus lorsque, dans les deux premières, on fait varier y de y_0 à Y, et, dans les deux autres, x de x_0 à X (*) : on pourra poser évidemment

$$\mathrm{A}' = \delta;$$

de même chacune des expressions

$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2,\qquad \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2} + \left(\frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}\right)^2$$

étant le carré d'un module et ne pouvant, par conséquent, avoir de maximum que l'infini, ne pourra présenter aucun maximum dans le contour ABCDA: donc le maximum de chacune de ces quantités, quand x et y varieront de manière à correspondre toujours à des points du contour ABCDA, aura lieu pour un point situé dans le contour même. Ainsi, faisant successivement, dans les deux ex-

(*) Au moyen du théorème de M. Sturm, on peut toujours obtenir la quantité δ quand, du moins, la fonction f est algébrique.

pressions précédentes,

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

et opérant comme plus haut, on pourra trouver un nombre B plus grand que la plus grande valeur que reçoit $P^2 + Q^2$ pour les différents points situés dans le contour ABCDA, et un nombre B'' plus grand que la plus grande valeur de $\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2$ pour les mêmes points. Cela fait, si les valeurs trouvées pour A', B', B'' satisfont à la condition

$$A'^2 > BB'',$$

on sera sûr, comme on l'a dit plus haut, que la surface représentée par l'équation (2) tourne sa convexité vers le plan des (x, y) en tous les points projetés dans le contour ABCDA; si, au contraire, on a

$$A'^2 < BB'',$$

on ne pourra rien conclure, et il faudra resserrer le contour; du reste, il est évident qu'on finira par avoir

$$A'^2 > BB'',$$

puisque l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2$$

reste toujours au-dessous d'une certaine limite, tandis que la suivante,

$$P^2 + Q^2,$$

s'approche de zéro indéfiniment.

Supposons donc que nous ayons trouvé un contour ABCDA tel, qu'en tous les points projetés dans ce contour, la surface représentée par l'équation (2) présente sa convexité vers le plan des (x, y). Si nous prenons comme première valeur approchée de la racine cherchée

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le nombre imaginaire répondant à un point m_0 de l'intérieur de ce contour, et que nous appliquions la méthode de Newton, nous aurons, d'après ce qui a été remarqué plus haut, une seconde valeur plus approchée que la première, en ce sens que le point m_1 qui lui correspondra sera plus voisin du point m que le point m_0 répondant à la première valeur approchée; mais ce point m_1 sera-t-il, comme le point m_0, dans l'intérieur du contour ABCDA, et serons-nous sûrs, en appliquant de nouveau la méthode de Newton, d'obtenir une valeur encore plus approchée? Évidemment non. Il est indispensable de prendre, en outre, les dispositions suivantes.

Considérons l'expression

$$\frac{P^2 + Q^2}{4\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]},$$

qui, d'après ce que l'on a vu plus haut, est égale au carré de la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (x, y) sur la trace du plan tangent à la surface représentée par l'équation (2), au point dont le point (x, y) est la projection. Cette expression sera moindre que le carré de la distance du point (x, y) au point m, si le point (x, y) ne sort pas du contour ABCDA. Or, faisant parcourir tout le contour au point (x, y), déterminons une quantité ε plus petite que la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{P^2 + Q^2}{4\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]},$$

puis resserrons ce contour ABCDA jusqu'à ce que nous ayons obtenu un nouveau contour $A'B'C'D'A'$ rectangulaire comme le premier, et tel que le carré de la diagonale $A'C'$ ou $B'D'$ soit $= \varepsilon$ ou $< \varepsilon$. Il est clair que tous les points de ce nouveau contour seront plus voisins du point m que celui des points du contour ABCDA qui en est le plus voisin; par conséquent, tous les points plus voisins du point m que les points du contour $A'B'C'D'A'$ seront nécessairement dans l'intérieur du contour ABCDA. Si donc on prend comme première valeur approchée de la racine une valeur répondant à un point du contour $A'B'C'D'A'$, on sera sûr que toutes les valeurs approchées suivantes, obtenues par la méthode de Newton, répondront à des points situés dans le contour ABCDA, et la méthode de Newton s'appliquera avec certitude. Quant au nombre ε, on comprend qu'il est très-facile à déterminer. En effet, en cherchant, comme on a vu plus haut, un nombre B plus grand que la plus grande des valeurs que reçoit

$$P^2 + Q^2$$

pour les différents points du contour ABCDA, on a pu trouver en même temps un nombre A plus petit que la plus petite de ces valeurs; comme aussi en cherchant un nombre B' plus petit que la valeur minimum de

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

on a pu déterminer un nombre B' plus grand que la valeur maximum: or, il est clair que, ces deux nombres étant connus, on peut poser

$$\varepsilon = \frac{A}{4B'}.$$

Il nous reste à examiner si l'application suffisamment prolongée de la méthode de Newton conduit à une valeur approchée aussi voisine qu'on puisse le désirer de la valeur exacte de la racine. Pour cela, nous allons chercher à évaluer le degré d'approximation fourni par chaque opération.

Soient toujours $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ la racine qu'il s'agit de calculer, $a + b\sqrt{-1}$ la première valeur approchée prise arbitrairement, mais répondant à un point du contour $A'B'C'D'A'$, et $a' + b'\sqrt{-1}$ la seconde valeur approchée obtenue par la méthode de Newton ; on aura

$$(3) \qquad f_1(\alpha, \beta) = 0, \quad f_2(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(4) \quad f_1(a, b) + (a' - a)\varphi(a, b) - (b' - b)\psi(a, b) = 0,$$

$$(5) \quad f_2(a, b) + (a' - a)\psi(a, b) + (b' - b)\varphi(a, b) = 0.$$

Or les deux équations (3) donnent, au moyen de la série de Taylor,

$$\begin{aligned} &f_1(a, b) + (\alpha - a)\varphi(a, b) - (\beta - b)\psi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\chi[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] \\ &- (\alpha - a)(\beta - b)\lambda[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] = 0, \\ &f_2(a, b) + (\alpha - a)\psi(a, b) + (\beta - b)\varphi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\lambda[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] \\ &+ (\alpha - a)(\beta - b)\chi[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] = 0, \end{aligned}$$

en posant

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d^2Q}{dx\,dy} = -\frac{d^2P}{dy^2} = \chi(x, y),$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{d^2P}{dx\,dy} = -\frac{d^2Q}{dy^2} = \lambda(x, y),$$

et représentant par θ et θ_1 deux nombres compris entre 0 et 1.

Simplifiant les équations précédentes au moyen des équations (4) et (5), on a encore

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - a')\varphi(a, b) - (\beta - b')\psi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\chi[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] \\ &- (\alpha - a)(\beta - b)\lambda[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(7)\left\{\begin{aligned}&(\alpha-a')\,\psi(a,b)+(\beta-b')\,\varphi(a,b)\\&+\frac{(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2}{2}\lambda[a+\theta_1(\alpha-a),\,b+\theta_1(\beta-b)]\\&+(\alpha-a)(\beta-b)\chi[a+\theta_1(\alpha-a),\,b+\theta_1(\beta-b)]=0;\end{aligned}\right.$$

mais si l'on considère les deux expressions

$$\frac{(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2}{2}\chi(x,y)-(\alpha-a)(\beta-b)\lambda(x,y),$$

$$\frac{(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2}{2}\lambda(x,y)+(\alpha-a)(\beta-b)\chi(x,y),$$

et que l'on prenne la racine carrée de la somme de leurs carrés, on trouve

$$\frac{(\alpha-a)^2+(\beta+b)^2}{2}\sqrt{[\chi(x,y)]^2+[\lambda(x,y)]^2};$$

c'est-à-dire un nombre moindre que

$$\frac{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}{2}\sqrt{B''},$$

quand, du moins, x et y se rapportent à des points situés dans le contour ABCDA : cela nous montre que chacune des deux expressions

$$\frac{(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2}{2}\chi[a+\theta(\alpha-a),\,b+\theta(\beta-b)]$$
$$-(\alpha-a)(\beta-b)\lambda[a+\theta(\alpha-a),b+\theta(\beta-b)],$$

$$\frac{(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2}{2}\lambda[a+\theta_1(\alpha-a),\,b+\theta_1(\beta-b)]$$
$$+(\alpha-a)(\beta-b)\chi[a+\theta_1(\alpha-a),\,b+\theta_1(\beta-b)],$$

est, quels que soient θ et θ_1, moindre aussi en valeur absolue que

$$\frac{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}{2}\sqrt{B''}.$$

On peut donc écrire de la manière suivante les équations

(6) et (7) :

$$(\alpha - a')\varphi(a, b) - (\beta - b')\psi(a, b)$$
$$= \pm\theta_2 \frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''},$$
$$(\alpha - a')\psi(a, b) + (\beta - b')\varphi(a, b)$$
$$= \pm\theta_3 \frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''},$$

θ_2 et θ_3 étant des nombres positifs moindres que 1.

Prenant la racine carrée de la somme des carrés des deux membres, il vient

$$[(\alpha - a')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}}\{[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= [\theta_2^2 + \theta_3^2]^{\frac{1}{2}}\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''};$$

d'où l'on tire

$$[(a - \alpha')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}[(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2].$$

Or l'expression

$$[(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2]^{\frac{1}{2}}$$

représente la distance du point m_0 qui correspond à la première valeur approchée au point-racine m, et l'expression

$$[(\alpha - a')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}}$$

représente la distance du point m_1 correspondant à la seconde valeur approchée au même point; donc, en appelant δ et δ_1 ces distances, on voit que l'on a

$$\delta_1 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\delta^2,$$

ou bien

$$\delta_1 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\delta\right)\delta;$$

de même, en appelant δ_2, δ_3, δ_4,..., les distances du point *m* aux points correspondants à la troisième, à la quatrième, à la cinquième, etc., valeur approchée, on a

$$\delta_2 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_1^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_2 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^3 \delta,$$

$$\delta_3 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_2^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_3 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^7 \delta,$$

$$\delta_4 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_3^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_4 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^{15} \delta,$$

. . . .

Cela nous montre que si, aux conditions précédemment exigées, on ajoute celle-ci

$$\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta < 1,$$

ce que l'on peut toujours faire en resserrant suffisamment le contour $A'B'C'D'A'$, la distance du point *m* aux points correspondants aux valeurs approchées finira par devenir aussi petite qu'on le voudra.

De ce qui précède, on conclut facilement le nombre de décimales exactes fournies par chaque opération dans la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de la racine imaginaire que l'on calcule; mais nous renverrons sur ce point à la Note que M. Cauchy a insérée à la suite de ses Leçons de calcul différentiel, Note dans laquelle l'illustre analyste a été conduit à des résultats analogues à ceux que l'on vient de faire connaître, quoique la méthode qu'il a suivie soit en tout différente de la nôtre.